ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2 курс

Е.Г. Скляренко

Часть 1. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание основано на материалах лекций по курсу “Классическая дифференциальная геометрия”, неоднократно читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ студентам-математикам второго года обучения. В отличие от электронных вариантов, оформлявшихся инициативными студентами в разное время (наиболее распространённым оказался основанный на лекционном курсе 2002 года), материал в настоящем издании распределён не по лекциям (тем более, что такое распределение раз от раза изменялось), а по тематическим признакам. При этом преследовалась цель не только ликвидировать ошибки и пробелы, допускавшиеся в указанных “пробных” вариантах, но и представить весь материал, хотя и в сокращённом по сравнению с лекциями виде, максимально наглядным, а само изложение – неформальным, лаконичным и предельно простым как в отношении доказательств утверждений, так и в подаче представляемых понятий и обосновании основных геометрических идей.

Большая заслуга в подготовке первоначального текста лекций принадлежала студентам М. Потериной, К. Никитину, В. Курбаеву, Ю. Малыхину и Ю. Притыкину, а также Ю. Кудряшову – советы по оформлению ТеХификации текста и типографскому набору. В дальнейшем ряд полезных изменений в текст внёс С. Шашков.

После ознакомления с электронным вариантом автором была проведена тщательная обработка текста в целом, заполнен ряд лакун, исправлены неточности в формулировках некоторых утверждений, восстановлены логически незавершённые доказательства. Большую помощь в электронном оформлении окончательного текста оказал аспирант кафедры высшей геометрии и топологии Д. Артамонов. Автор искренне признателен всем, чье участие помогло осуществить появление этого издания.

Е.Г. Скляренко.

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

1. Введение. Основные понятия

1.1. Гладкие кривые

Гладкая кривая — одно из основных понятий нашего курса. Прежде, чем дать определение, рассмотрим параметрическое задание прямой: $\mathbf{r}(t) = r_0 + \vec{v}\,t$, где направляющий вектор (или вектор скорости) $\vec{v} \neq 0$.

Мы хотим дать определение, из которого следовало бы, что гладкая кривая локально (в окрестности каждой своей точки) получается с помощью гладкой деформации плоскости (без разрывов и склеиваний) из интервала прямой линии. Можно было бы определить кривую, например, так: гладкая кривая — это кривая, заданная радиус-вектором $r(t)$, т.е. системой

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – гладкие (непрерывно дифференцируемые) функции. Однако такое определение не годится: рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнениями $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$. Мы видим, что в точке $t = 0$ эта кривая не гладкая. **(Рис. 1)**

Определение. Фигура $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ является *гладкой кривой*, если для любой точки на кривой найдётся такая окрестность U этой точки, в которой γ (т.е. $\gamma \cap U$) можно задать гладкой функцией $\mathbf{r} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, и вектор скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \neq 0$ при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

В примере, данном выше, имеем $\dot{\mathbf{r}} = (2t, 3t^2)$ и $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$.

Замечание. Гладкость кривой не зависит от системы координат, в которой она задана. Наше определение корректно, потому что в нём мы использовали только гладкость функции и то, что вектор скорости не равен нулю, а эти понятия от системы координат не зависят.

Определение. Параметризацию кривой, для которой векторы скорости в каждой точке отличны от нуля, будем называть *регулярной*.

Посмотрим, что изменится, если мы в уравнении кривой изменим параметр t и зададим кривую другой регулярной параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, $\dot{\mathbf{r}}(\tau) \neq 0$.

Теорема 1.1. *Если параметризовать гладкую кривую $\boldsymbol{r}(t)$ регулярным параметром τ, то $t = t(\tau)\tau = \tau(t)$ — взаимно обратные гладкие функции.*

□ В определении гладкой кривой вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, и без ограничения общности можно считать, что $\dot{x}(t) \neq 0$. Значит, по теореме об обратной функции существует гладкая функция $t = t(x)$. Поскольку, по определению гладкой кривой, $x = x(\tau)$ также гладкая функция, то и их композиция $t = t(x) = t(x(\tau)) = t(\tau)$ тоже будет гладкой функцией. По симметричным соображениям $\tau = \tau(t)$ также будет гладкой. Покажем, что $t'_\tau \neq 0$. В самом деле, если бы это было не так, то $\dot{\mathbf{r}}(\tau) = \dot{\mathbf{r}}(t(\tau))t'_\tau = 0$, а это противоречит условию $\dot{\mathbf{r}}(\tau) \neq 0$. По теореме о производной обратной функции $t'_\tau = \frac{1}{\tau'_t}$. ■

Следствие 1.2. *Пусть $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Тогда вектор скорости при параметре τ будет равен $\tilde{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{r}}(\tau) = \dot{\boldsymbol{r}}(t(\tau))t'_\tau = \boldsymbol{v} \cdot t'_\tau$, т. е. будет коллинеарен вектору $\boldsymbol{v}$.* ■

Таким образом, векторы скорости в каждой точке кривой при всевозможных регулярных параметризациях коллинеарны.

Определение. Векторы скорости $\dot{\mathbf{r}}(t)$ кривой $\mathbf{r}(t)$ при всех гладких параметризациях называются *касательными векторами* этой кривой.

(Заметим, что мы здесь говорим о всех гладких (непрерывно дифференцруемых) параметризациях, а не только регулярных. Это нужно, чтобы причислить к касательным нулевой вектор, который не может быть вектором скорости регулярной параметризации.)

Определение. Касательная прямая *к кривой* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 *— это прямая, определенная векторами скорости регулярных параметризаций:* $l(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)t$.

В силу следствия, касательная прямая не зависит от выбора параметризации, т. к. векторы скорости при разных параметризациях коллинеарны, и касательные прямые совпадут.

В дальнейшем через $\mathbf{r}_0$ будем обозначать точку на кривой в момент времени t_0, $\triangle\mathbf{r} := \mathbf{r}(t_0 + \triangle t) - \mathbf{r}(t_0)$.

Через $\mathbf{v}$ часто будем обозначать касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}$.

Теорема 1.3. *Расстояние от точек кривой до касательной является величиной 2-го порядка малости от* $\triangle t$. *Касательная прямая — это единственная прямая с таким свойством.*

□ Рассмотрим кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. По формуле Тейлора имеем $\triangle\mathbf{r} = \mathbf{v}\triangle t + \tilde{R}$, где $\tilde{R}$ – члены ряда порядка ≥ 2. Возьмем произвольную прямую $l(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, где $|\mathbf{a}| = 1$. Расстояние от точки $\mathbf{r}_0 + \triangle\mathbf{r}$ на кривой до прямой равно $\big|[\mathbf{a}, \triangle\mathbf{r}]\big| = \Big|[\mathbf{a}, \mathbf{v}]\triangle t + \Big[\mathbf{a}, \tilde{R}\Big]\Big|$. Для того, чтобы это расстояние являлось величиной второго порядка малости от $\triangle t$, необходимо и достаточно, чтобы $[\mathbf{a},\ \mathbf{v}] = 0$, т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны. Но это и означает, что l служит касательной прямой. ■

1.2. Гладкие поверхности

Определение. *Гладкая поверхность* – это фигура, которая локально в каждой точке $\mathbf{a}_0$ допускает описание гладкой функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0,0) = \mathbf{a}_0$. При этом векторы $\mathbf{m}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^1}$ и $\mathbf{m}_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^2}$ не коллинеарны. Это описание можно назвать *локальной регулярной параметризацией* поверхности.

В частности, плоскость задается гладкой функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{m}_1 u^1 + \mathbf{m}_2 u^2$, где $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ не коллинеарны.

Теорема 1.4. *Поверхность можно задать тремя эквивалентными способами:*

1. Так, как в определении;

2. как график гладкой функции $z = f(x, y)$*;*

3. неявно, с помощью гладкой функции $F(x, y, z)$*, для которой* $\nabla F \neq 0$.

□ $1 \Rightarrow 2$ Напишем два вектора m_1 и m_2 один под другим, получим матрицу

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Условие неколлинеарности векторов m_1 и m_2 эквивалентно тому, что её ранг $rk\,A = 2$, т. е. в матрице есть минор, не равный нулю. Без ограничения общности, пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0\ , \qquad (3)$$

тогда существуют гладкие обратные функции $u^1 = u^1(x, y)$ и $u^2 = u^2(x, y)$. Следовательно, $z = z(u^1, u^2) = z(u^1(x, y),\ u^2(x, y)) = f(x, y)$, т. е. z – гладкая функция от x и y, и данная поверхность есть график этой функции.

$2 \Rightarrow 1$ Положим $x = u^1$, $y = u^2$, $z = f(u^1, u^2)$. Тогда $m_1 = (1, 0, f_{u^1})$, $m_2 = (0, 1, f_{u^2})$ неколлинеарны, имеем регулярную прараметризацию с помощью параметров x, y.

$2 \Rightarrow 3$ Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) := f(x, y) - z = 0$, тогда $grad\, F = (f_x, f_y, -1) \neq 0$.

$3 \Rightarrow 2$ Пусть $grad\, F \neq 0$, тогда, без ограничения общности, $F_z \neq 0$. По теореме о неявной функции можно разрешить $F(x, y, z) = 0$ относительно z, т. е. $z = f(x, y)$. ■

1.3. Геометрический смысл параметров. Криволинейные координаты

Теорема 1.5. *Существует локальная биекция между точками поверхности и парами (u^1, u^2), т. е. $\{u^i\}$ служат локальными координатами на поверхности.*

□ Ясно, что каждой паре координат (u^1, u^2) соответствует точка поверхности. Это соответствие биективно: $(x, y, z) \leftrightarrow (x, y, z(x, y)) \leftrightarrow (x, y)$ и, согласно доказательству части $1 \Rightarrow 2$ теоремы 1.4, $(x, y) \leftrightarrow (u^1, u^2)$. ■

Определение. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$. Зафиксируем координату u^2, тогда получим кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1)$ на поверхности. Такие кривые называются u^1-линиями. Аналогично, зафиксировав координату u^1, получим u^2-линию. Все эти линии называются *координатными.*

Теорема 1.6. *Координатные линии «разных сортов» пересекаются, а линии «одного сорта» (при разных значениях зафиксированных параметров) не пересекаются и не касаются.*

□ Допустим, что две линии одного сорта имеют общую точку на поверхности. Но тогда этой точке будут соответствовать две разные пары координат, а это противоречит предыдущей теореме. ■

1.4. Карта поверхности

Определение. *Картой поверхности* называется пара (U, Φ), где U – область в $\mathbb{R}^2$, а отображение Φ ставит в соответствие точке на поверхности с криволинейными координатами (u^1, u^2) точку в области U со стандартными координатами (u^1, u^2) плоскости. Как было доказано ранее, такое отображение биективно.

Теорема 1.7. *Гладкие кривые на поверхности отображение Φ переводит в гладкие кривые на карте. Пересечение кривых переходит в пересечение, касание – в касание, касательный вектор $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – в касательный вектор $(\dot{u}^1,\ \dot{u}^2)$.*

□ Как мы знаем, существует биекция между точками карты (u^1, u^2) и точками поверхности. Она может быть описана формулами типа $u^1 = u^1(x, y)$ и $u^2 = u^2(x, y)$. Рассмотрим гладкую кривую $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ на поверхности. Подставляя функции $x(t)$, $y(t)$ в формулы для u^1 и u^2, получаем t-параметрическое задание гладкой кривой на карте – изображение $\mathbf{r}(t)$. Координаты касательного вектора на карте $(\dot{u}^1,\ \dot{u}^2)$. С другой стороны в пространстве имеем $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\dot{u}^2 = \mathbf{m}_1 u^1 + \mathbf{m}_2 \dot{u}^2$.

Таким образом, касательный вектор $\mathbf{v}$ имеет в локальном базисе $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ координаты $(\dot{u}^1,\ \dot{u}^2)$, т. е. переходит в касательный вектор $(\dot{u}^1,\ \dot{u}^2)$ к кривой на карте.

■

Как и для кривых, можно рассматривать в окрестности точки несколько карт (несколлько локальных параметризаций поверхности). Установим связь между координатами одной и той же точки поверхности на разных картах.

Определение. *Диффеоморфизмом* областей U и V называется биективное отображение $f : U \to V$, такое что f, f^{-1} гладкие отображения.

Теорема 1.8. *Между областями двух карт $U(u^1, u^2)$ и $V(v^1, v^2)$, изображающими один и тот же фрагмент поверхности, существует диффеоморфизм. Матрица Якоби $J = \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$ есть матрица перехода от базиса $\{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2\}$ к базису $\{\boldsymbol{m}'_1, \boldsymbol{m}'_2\}$, где $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$, $\boldsymbol{m}'_i = \frac{\partial r}{\partial v^i}$. Матрица $I = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right)$ будет матрицей обратной замены базиса.*

☐ Рассуждаем, как и в случае кривых. Согласно теореме 1.4, имеется диффеоморфизм типа $(u^1, u^2) \leftrightarrow (x, y)$, причем x, y гладко зависят от v^1, v^2; значит, u^1, u^2 гладко зависят от v^1, v^2. По симметричным соображениям верно и обратное.

Для базиса V имеем

$$\mathbf{m}'_i = \frac{\partial r}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial v^i} + \frac{\partial r}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial v^i} = \mathbf{m}_1\frac{\partial u^1}{\partial v^i} + \mathbf{m}_2\frac{\partial u^2}{\partial v^i}, \tag{4}$$

то есть $\begin{pmatrix}\mathbf{m}'_1\\ \mathbf{m}'_2\end{pmatrix} = J\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\end{pmatrix}$. По симметричным соображениям $\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\end{pmatrix} = I\begin{pmatrix}\mathbf{m}'_1\\ \mathbf{m}'_2\end{pmatrix}$. ■

1.5. Касательная плоскость

Определение. *Касательной плоскостью* к поверхности в точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 и натянутая на векторы m_1 и m_2.

Это определение корректно, так как не зависит от параметризации поверхности: если мы возьмём другие параметры v^1 и v^2, то по предыдущей теореме векторы m'_1 и m'_2 линейно выражаются через m^1 и m^2, т. е. порождают ту же плоскость.

Теорема 1.9. *Касательная плоскость к поверхности состоит из всех касательных векторов к кривым на поверхности, проходящим через точку касания.*

☐ Пусть кривая задается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t_0) = M_0$. Имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\dot{u}^2 = \mathbf{m}_1\dot{u}^1 + \mathbf{m}_2\dot{u}^2 \in \langle \mathbf{m}_1,\, \mathbf{m}_2\rangle, \tag{5}$$

т. е.. вектор скорости кривой лежит в касательной плоскости. Теперь возьмём произвольный вектор $\mathbf{a} := (\alpha, \beta)$ в касательной плоскости, и найдём кривую, для которой он будет касательным. Пусть наша поверхность задаётся уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2)$. Подставим $u^1 = u^1_0 + \alpha t$, $u^2 = u^2_0 + \beta t$. Тогда

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(u^1_0 + \alpha t)'_t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}(u^2_0 + \beta t)'_t = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 = \mathbf{a}. \ ■ \tag{6}$$

Теорема 1.10. *Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ имеет вид*

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0. \tag{7}$$

Частные производные берутся в точке M_0.

☐ Рассмотрим кривую на поверхности, проходящую через точку M_0 и заданную уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Тогда $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Продифференцировав тождество, получим $F_x\dot{x}+F_y\dot{y}+F_z\dot{z} = 0 \Leftrightarrow (grad\,F, \dot{\mathbf{r}}) = 0$. Вектор $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ касательной плоскости пропорционален $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, поэтому удовлетворяет (7). ■

Следствие 1.11. *Для графика функции $z = f(x, y)$ уравнение касательной плоскости имеет вид $z - z_0 = f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0)$.* ■

Теорема 1.12. *Расстояние от точек поверхности до касательной плоскости является величиной 2-го порядка малости от $\triangle t$. Касательная плоскость — это единственная плоскость с таким свойством.*

$\square$ По формуле Тейлора имеем $\triangle\mathbf{r} = m_1\triangle u^1 + m_2\triangle u^2 + \tilde{R}$, где $\tilde{R}$ – члены ряда порядка ≥ 2. В точке $\mathbf{r}_0$ возьмем произвольную плоскость с нормальным вектором n, таким что $|n| = 1$. Расстояние от точки $\mathbf{r}_0 + \triangle\mathbf{r}$ поверхности до этой плоскости равно $d = (\triangle\mathbf{r}, n) = (n, m_1)\triangle u^1 + (n, m_2)\triangle u^2 + (n, \tilde{R}$. Чтобы не было членов первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы $(n, m_1) = 0$ и $(n, m_2) = 0$, что равносильно условиям $n\perp m_1$ и $n\perp m_2$, т. е. это и есть касательная плоскость. $\blacksquare$

2. Теория гладких кривых

2.1. Длина дуги кривой

В курсе математического анализа длина кривой вводилась как предел длин вписанных ломаных $\triangle\mathbf{r}_i$ при стремлении длин звеньев к нулю: $s = \lim\limits_{\triangle t\to 0} |\triangle\mathbf{r}_i|$. Мы же определим длину той формулой,которая выводилась из этого определения:

Определение. *Длина гладкой кривой* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ от точки $\mathbf{r}(t_0)$ до точки $\mathbf{r}(t)$ есть $s = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{\mathbf{r}}|dt$.

Длина не должна зависеть от параметризации кривой. При нашем определении (в отличие от прежнего) нужна проверка независимости. Для проверки перейдем к другому параметру τ, при этом $t'_\tau \neq 0$. Допустим $t'_\tau > 0$, тогда $|\mathbf{r}'_t|dt = |\mathbf{r}'_t|t'_\tau\,d\tau = |\mathbf{r}'_\tau|d\tau$, и интеграл (длина) не изменится.

Теорема 2.1. *Длина кривой (в нашем определении) совпадает с пределом длин вписанных ломаных*[1].

$\square$ По определению интеграла $s = \lim\limits_{\triangle t\to 0} \sum |v_i|\triangle t_i$, а в другом определении, раскладывая $\triangle r_i$ в ряд Тейлора, получим $\triangle r_i = v_i\triangle t_i + \vec{R}_i\triangle t^2$, где $\vec{R}_i$ — некоторый ограниченный вектор. Оценим разность полученных сумм. В силу неравенства треугольника: $\big||\triangle r_i| - |v_i|\triangle t_i\big| \leq |\vec{R}_i|\triangle t_i^2$, или для интегральных сумм $\big|\sum_i |\triangle r_i| - \sum_i |v_i|\triangle t_i\big| \leq \sum_i |\vec{R}_i|\triangle t^2$.

Можно считать, что все $\triangle t_i$ равны $\triangle t$. $\Big(\sum_i |\vec{R}_i|\triangle t\Big)\triangle t \to 0$ при $\triangle t \to 0$, что и требовалось. $\blacksquare$

Следствие 2.2. $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}|,\ ds = |\mathbf{v}|dt,\ d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt,\ |d\mathbf{r}| = ds.$ $\blacksquare$

2.2. Натуральный параметр

Заметим, что величину $s = \int\limits_{t_0}^{t} |v|dt$ можно выбрать в качестве параметра кривой (так как $\frac{ds}{dt} = |v| \neq 0$, то функция $s = s(t)$ локально обратима: $t = t(s)$).

Определение. Этот параметр называется *натуральным.* В дальнейшем, натуральный параметр, как правило, будем обозначать через s, а через t — любой другой.

Теорема 2.3. *С точностью до постоянного слагаемого параметр t совпадает с натуральным параметром s тогда и только тогда, когда в этой параметризации $|\boldsymbol{v}| = 1$. Параметр t равен λs, где $\lambda = const$, тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{v}| = const$.*

$\square$ Первое утверждение теоремы следует из второго. Пусть $t = \lambda s$, тогда $|\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda} = const$. Наоборот: если $|\mathbf{v}| = const$, то $ds = |\mathbf{v}|dt \Leftrightarrow s = |\mathbf{v}|t + c$ и $t = \frac{s}{|\mathbf{v}|} + d$.

---

[1] Более строгое доказательство дается в курсе математического анализа.

Дифференнцирование по натуральному параметру s будем, как правило, обозначать штрихом, по другим параметрам точкой.

2.3. Кривизна кривой

Пусть кривая задана натуральным параметром $t = s$. Обозначим $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{ds}} =: \boldsymbol{\varepsilon_1}$ (это обозначение ещё встретится), причем $|\boldsymbol{\varepsilon}_1| = 1$. Тогда при движении по кривой конец свободного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ будет двигаться по единичной сфере. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1'$ будет лежать в касательной плоскости к сфере, следовательно, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_1'$.

Это можно было доказать и иначе: параметр s натуральный, значит, $|\boldsymbol{\varepsilon}_1| \equiv 1$ и $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \equiv 1$. Продифференцировав тождество, получим $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1') + (\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_1) = 2(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1') = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_1'$

Заметим, что чем больше вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1'$, тем сильнее изгибы кривой. Этим оправдано следующее

Определение. *Кривизной* гладкой кривой называется величина

$$k(s) := \left|\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| \tag{1}$$

Теорема 2.4. *Кривая имеет на некотором участке нулевую кривизну $\Leftrightarrow$ этот участок прямолинейный.*

$\square$ Справа налево утверждение очевидно (продифференцируйте уравнение прямой!). Слева направо: по формуле Тейлора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'s + \frac{\mathbf{r}''s^2}{2} + \ldots$. Если $k(s) = |\mathbf{r}''(s)| = 0$, то останется только член первого порядка, и, кроме того, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = const = \mathbf{c}$, так как $\boldsymbol{\varepsilon}_1' = 0$. Получилось уравнение прямой вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{c}s$. $\blacksquare$

Этим оправдано следующее

Определение. Точка на кривой называется *точкой спрямления*, если в этой точке кривизна равна 0.

Теорема 2.5. *Расстояние от кривой до своей касательной в точке спрямления (и только в такой точке) является величиной третьего порядка малости относительно $\triangle s$.*

$\square$ Имеем

$$\triangle \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{1!}\triangle s + \frac{\boldsymbol{r}''}{2!}\triangle s^2 + \frac{\boldsymbol{r}'''}{3!}\triangle s^3 + \ldots \tag{2}$$

Возьмем произвольную прямую, проходящую через точку $\boldsymbol{r}_0$ с направляющим вектором m, таким что $|m| = 1$. Тогда расстояние до этой прямой будет равно

$$d = |[m, \triangle \boldsymbol{r}]| = \left|[m, \boldsymbol{\varepsilon}_1]\triangle s + \frac{1}{2}[m, \boldsymbol{r}'']\triangle s^2 + \frac{1}{6}[m, \boldsymbol{r}''']\triangle s^3 + \ldots\right| \tag{3}$$

Расстояние d будет третьего порядка малости $\Leftrightarrow$ вектор m коллинеарен вектору $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и коллинеарен вектору $\boldsymbol{r}''$. Но так как эти векторы ортогональны, то это возможно тогда и только тогда, когда $k = 0$. $\blacksquare$

При рассмотрении плоских кривых можно определить кривизну со знаком.

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, где угол α – наклон касательной к оси Ox. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1' = \alpha' \cdot (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)),$$

и $k(s) = |\alpha'|$. Для плоских кривых можно убрать модуль, и по определению полагают $k = \alpha'$.

2.4. Соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся окружность

При $k(s) \neq 0$ определён вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\frac{1}{k}\,\boldsymbol{\varepsilon}_1') \perp \boldsymbol{\varepsilon}_1$. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ называется *вектором главной нормали* кривой в точке $r(s)$.

Определение. Пусть $k(s_0) \neq 0$. Плоскость, натянутая на векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ и проходящая через точку $\boldsymbol{r}(s_0)$, называется *соприкасающейся плоскостью.*

Теорема 2.6. *Соприкасающаяся плоскость — единственная плоскость, такая, что расстояние от кривой до неё третьего порядка малости от $\triangle s$.*

$\square$ Возьмём произвольную плоскость с единичным нормальным вектором $\boldsymbol{n}$, проходящую через точку $\boldsymbol{r}_0$. Тогда расстояние до плоскости будет равно

$$d = |(\boldsymbol{n}, \triangle \boldsymbol{r})| = \left|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)\triangle s + \frac{1}{2}k(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}''')(\triangle s)^3 + \dots\right| \tag{4}$$

Для выполнения условий теоремы необходимо и достаточно $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) = 0 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$, что и означает совпадение данной плоскости с соприкасающейся.

Пример. Рассмотрим окружность $\boldsymbol{r}(\varphi) = (R\cos\varphi,\, R\sin\varphi)$. Найдём натуральный параметр: длина дуги равна $s = R\varphi$, следовательно $\varphi = \frac{s}{R}$. Переходя к параметру s, получим $\boldsymbol{r}(s) = R(\cos\frac{s}{R},\, \sin\frac{s}{R})$. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1' = \frac{1}{R}\left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}\right). \tag{5}$$

Следовательно, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \left(-\cos\frac{s}{R},\, -\sin\frac{s}{R}\right)$, и кривизна $k = \frac{1}{R}$.

Определение. Если в некоторой точке $k \neq 0$, то величина $R = \frac{1}{k}$ называется *радиусом кривизны* (в направлении $\boldsymbol{\varepsilon}_2$). Окружность радиуса R в соприкасающейся плоскости с центром в точке, находящейся на расстоянии R от кривой в направлении вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, называется *соприкасающейся.*

Теорема 2.7. *Расстояние от кривой до соприкасающейся окружности является величиной третьего порядка малости от $\triangle s$. Эта окружность — единственная с таким свойством.*

$\square$ Проведём произвольную окружность через точку $\boldsymbol{r}_0$. Пусть k — кривизна кривой в точке $\boldsymbol{r}_0$, $\tilde{k}$ – кривизна окружности. Для кривой разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1\triangle s + \frac{1}{2}k\boldsymbol{\varepsilon}_2(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{r}'''(\triangle s)^3 + \dots\,, \tag{5}$$

а для окружности

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\boldsymbol{r}}_0 + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\triangle s + \frac{1}{2}\tilde{k}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}\tilde{\boldsymbol{r}}'''(\triangle s)^3 + \dots\,. \tag{6}$$

Расстояние между этими точками равно длине вектора $\triangle\boldsymbol{r} - \triangle\tilde{\boldsymbol{r}}$:

$$d = |(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1)\triangle s + \frac{1}{2}(k\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \tilde{k}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2)(\triangle s)^2 + \frac{1}{6}(\boldsymbol{r}''' - \tilde{\boldsymbol{r}}''')(\triangle s)^3 + \dots|. \tag{7}$$

Эта величина будет третьего порядка малости тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ и $k\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \tilde{k}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$. Поскольку векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ единичные, то $k = \tilde{k}$. Значит, наша окружность совпадает с соприкасающейся. ■

Следствие 2.8. *Если плоская кривая имеет в некоторой точке ненулевую кривизну, то касательная в этой точке лежит по одну сторону от кривой.* ■

2.5. Трёхгранник Френе

Мы ввели в рассмотрение векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{r}'(s)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{k}\boldsymbol{\varepsilon}'$, где k — кривизна кривой. Дополним их до базиса.

Определение. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_3 := [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2]$ называется *вектором бинормали.* Репер $(\mathbf{r}(s); \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)$ называется *трёхгранником Френе.* Заметим, что $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ (как и $\boldsymbol{\varepsilon}_2$) определён только при $k \neq 0$.

Теорема 2.9 (Френе). *Имеют место формулы Френе*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1' = k\boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2' = -k\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \varkappa\boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3' = -\varkappa\boldsymbol{\varepsilon}_2 \tag{9}$$

Это система векторных линейных дифференциальных уравнний первого порядка. Матрица системы называется *матрицей Френе* и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$\square$ Рассмотрим два базиса $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$, соответствующие точкам s и $s + \triangle s$. Пусть Π – матрица перехода от $\boldsymbol{\varepsilon}_i(s)$ к $\boldsymbol{\varepsilon}_i(s + \triangle s)$. Так как оба базиса ортонормированные, то эта матрица ортогональна. Следовательно, $\Pi^t\Pi = E$. Продифференцируем это равенство: $(\Pi^t\Pi)' = (\Pi^t\Pi) + \Pi^t(\Pi)' = 0$. Устремим $\triangle s \to 0$, тогда $\Pi \to E$.

В пределе получаем равенство $(\Pi^t)' + (\Pi)' = 0$, т. е. $(\Pi')^t + \Pi' = 0$. Следовательно, матрица Π' кососимметрична.

Первую строку этой матрицы, т. е. первую формулу Френе, мы знаем, следовательно, знаем и первый столбец, а по диагонали стоят нули. Таким образом, матрица Френе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Осталось два места, противоположные по знаку. Обозначим их $\varkappa$ и $-\varkappa$, получим утверждение теоремы. $\blacksquare$

Определение. Функция $\varkappa(s)$ называется *кручением* кривой в точке s. Название функции $\varkappa$ объясняется следующими теоремами.

Теорема 2.10. *Кривая имеет нулевое кручение на некотором участке* $\Leftrightarrow$ *на этом участке кривая плоская.*

$\square$ Если кривая на некотором участке лежит в плоскости, то векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ лежат в ней же (это следует из определения производной вектор-функции). Тогда вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ нормален к этой плоскости, и $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = const$, откуда $\varkappa\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_3' = 0 \Rightarrow \varkappa = 0$.

Если $\varkappa = 0$, то $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = const = (A, B, C)$. Рассмотрим функцию $f(s) = (\boldsymbol{\varepsilon}_3.\boldsymbol{r}(s)) = Ax(s) + By(s) + Cz(s)$. Ее производная $f'(s) = (\boldsymbol{r}'(s), \boldsymbol{\varepsilon}_3) + (\boldsymbol{r}(s), \boldsymbol{\varepsilon}_3') = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_3) + 0 = 0$, так как $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_3$.

Следовательно, $f(s) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\varepsilon}_3) = const$, а это нормальное уравнение некоторой плоскости. $\blacksquare$

Определение. Если в некоторой точке кривая имеет нулевое кручение, она называется *точкой уплощения.*

Теорема 2.11. Точка $\mathbf{r}_0$ есть точка уплощения $\Leftrightarrow$ расстояние от кривой до соприкасающейся плоскости имеет четвёртый порядок малости от $\triangle s$.

□ Единичный вектор нормали соприкасающейся плоскости совпадает с $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ с точностью до знака. В силу равенства (4) условие теоремы выполняется тогда и только тогда, когда $(\mathbf{r}''', \boldsymbol{\varepsilon}_3) = 0$. Имеем

$$\mathbf{r}''' = (k\boldsymbol{\varepsilon}_2)' = k'\boldsymbol{\varepsilon}_2 + k\boldsymbol{\varepsilon}_2' \overset{(9)}{=} k'\boldsymbol{\varepsilon}_2 + k(-k\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \varkappa\boldsymbol{\varepsilon}_3),$$
$$(\mathbf{r}''', \boldsymbol{\varepsilon}_3) = k' \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\, \boldsymbol{\varepsilon}_3)}_{0} - k^2 \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\, \boldsymbol{\varepsilon}_3)}_{0} + k\varkappa \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\, \boldsymbol{\varepsilon}_3)}_{1} = k\varkappa.$$

Поскольку $k \neq 0$, то $\varkappa = 0$. ■

Теорема 2.12 (Геометрический смысл кручения). *Коэффициент $\varkappa$ – это угловая скорость вращения соприкасающейся плоскости вокруг вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$. Если $\varkappa > 0$, то в соответствии с третьей формулой Френе соприкасающаяся плоскость вращается в положительном направлении (по часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$).*

□ Пусть $\triangle\varphi$ – угол поворота соприкасающейся плоскости, т. е. угол поворота вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ вокруг $\boldsymbol{\varepsilon}_1$. Тогда

$$|\varkappa| = |\boldsymbol{\varepsilon}_3'| \approx \frac{|\triangle\boldsymbol{\varepsilon}_3|}{\triangle s} = \frac{|\triangle\boldsymbol{\varepsilon}_3|}{\triangle\varphi} \cdot \frac{\triangle\varphi}{\triangle s}. \tag{12}$$

Устремив $\triangle s$ к нулю, получим, что $|\varkappa| = |\varphi_s'|$, так как первый множитель в (12) есть предел отношения длины хорды к длине дуги при стремлении последней к нулю. ■

Для выяснения более полной картины нужна

Лемма 2.13. *Если трехгранник $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ вращается по часовой стрелке вокруг вектора $\boldsymbol{\omega} = (\alpha, \beta, \gamma)$ с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$, то скорости вращения концов векторов равны*

$$\boldsymbol{e}_1' = \gamma\boldsymbol{e}_2 - \beta\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\gamma\boldsymbol{e}_1 + \alpha\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3' = \beta\boldsymbol{e}_1 - \alpha\boldsymbol{e}_2, \tag{13}$$

т. е. матрица перехода от $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ к $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ равна (по строкам)

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

□ Докажем, что скорость вращения конца вектора $\boldsymbol{e}_i$ равна $\boldsymbol{e}_i' = [\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_i]$.

Во-первых, этот вектор ортогонален векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{e}_i$, т.е. $\boldsymbol{e}_i' \perp \boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{e}_i' \perp \boldsymbol{e}_i$, как и их векторное произведение.

Найдем модуль этого вектора. Скорость конца вектора при вращении равна $|\boldsymbol{\omega}| \sin\alpha$, где α – угол между $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{e}_i$, а величина $|\boldsymbol{\omega}| \sin\alpha$ есть в точности площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{e}_i$, так как $|\boldsymbol{e}_i| = 1$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{e}_i'$ ортогонален $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{e}_i$, имеет длину, равную длине соответствующего векторного произведения и направлен по часовой стрелке, если смотреть в направлении $\boldsymbol{\omega}$. Значит, $\boldsymbol{e}_i' = [\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_i]$.

Остаётся вычислить координаты векторов скоростей: так как $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ и $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, то получаем требуемое: $\boldsymbol{e}_1' = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}_1] = (0, \gamma, -\beta)$, $\boldsymbol{e}_2' = [\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_2] = (-\gamma,\, 0,\, \alpha)$, $\boldsymbol{e}_3' = [\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_3] = (\beta, -\alpha,\, 0)$. ■

Теорема 2.14. В момент s (в точке $\boldsymbol{r}(s)$) трёхгранник Френе вращается вокруг вектора $\boldsymbol{\omega} := (\varkappa, 0, k)$ по часовой стрелке с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$.

☐ В самом деле, матрица перехода от $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ к $\boldsymbol{\varepsilon}'_i$ есть матрица Френе (10), а по предыдущей лемме мгновенное вращение трехгранника происходит вокруг вектора $\boldsymbol{\omega} = (\varkappa, 0, k)$ со скоростьтю $|\boldsymbol{\omega}|$. Теорема доказана. ■

Заметим, что в точке уплощения мгновенное вращение – вокруг вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_3$.

2.6. Вычисление кривизны и кручения

Теорема 2.15. *Для кривизны и кручения кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ по произвольному праметру t справедливы следующие формулы:*

$$k = \frac{\big|[\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}]\big|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}, \qquad \varkappa = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}} \rangle}{\big|[\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}]\big|^2} \tag{15}$$

В плоском случае кручение равно 0, а кривизна задаётся формулой

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{16}$$

☐ Имеем $\frac{ds}{dt} = |\dot{\boldsymbol{r}}|$. Выпишем производные $\dot{\boldsymbol{r}}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \Big|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big|\boldsymbol{\varepsilon}_1, \\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big| \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \Big|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big|\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_1}{dt} = \frac{d}{dt}\Big|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big| \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \Big|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big|k\boldsymbol{\varepsilon}_2\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\Big|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big| \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + |\dot{\boldsymbol{r}}|^2 k\boldsymbol{\varepsilon}_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, $[\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}] = k|\dot{\boldsymbol{r}}|^3\boldsymbol{\varepsilon}_3$ и $\big|[\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}] = k|\dot{\boldsymbol{r}}|^3$. Отсюда получаем общую формулу для кривизны:

$$k = \frac{\big|[\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}]\big|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}. \tag{18}$$

Из неё, очевидно, получается формула (16) для плоского случая. Найдём часть третьей производной, содержащую $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. Для этого достаточно найти часть $\frac{d(|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 k\boldsymbol{\varepsilon}_2)}{dt}$, а именно

$$k|\boldsymbol{r}|^2\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_2}{dt} = k|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_2}{ds}\frac{ds}{dt} = k|\dot{\boldsymbol{r}}|^3(k\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \varkappa\boldsymbol{\varepsilon}_3) = -k^2|\dot{\boldsymbol{r}}|^3\boldsymbol{\varepsilon}_1 + k\varkappa\boldsymbol{\varepsilon}|\dot{\boldsymbol{r}}|^3\boldsymbol{\varepsilon}_3). \tag{19}$$

Отсюда $\dddot{\boldsymbol{r}} = \tilde{A} + k\varkappa|\dot{\boldsymbol{r}}|^3\boldsymbol{\varepsilon}_3$, где $\tilde{A}$ означает сумму членов, не содержащих $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. Имеем

$$\langle \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}} \rangle = |\dot{\boldsymbol{r}}|^6 k^2\varkappa \underbrace{\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 \rangle}_{=1} = \big|[\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}]\big|^2\varkappa \Rightarrow \varkappa = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}} \rangle}{\big|[\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}]\big|^2}. \qquad ■ \tag{20}$$

2.7. Построение кривой по кривизне и кручению

Покажем, что функции кривизны и кручения определяют кривую однозначно с точностью до начальных условий: кривая проходит через начало координат, и репер Френе совпадает с координатным репером. Иначе можно сформулировать так: кривые переводятся друг в друга ортогональным преобразованием. Рассмотрим сначала плоский случай.

Теорема 2.16. *Плоская кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ с кривизной $k(s)$ и начальными условиями $\boldsymbol{\varepsilon}_1(0) = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{r}(0) = 0$ существует и притом единственна.*

$\square$ Пусть $\alpha(s)$ — угол между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_1(s)$, т. е. угол наклона касательной. Тогда, как ранее было показано, $k = \alpha'(s)$, то есть $\alpha(s) = (k(s)ds + const$, но так как $\alpha(0) = 0$, то $\alpha(s)$ определяется однозначно.

Имеем $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, следовательно $x' = \cos\alpha(s)$, $y' = \sin\alpha(s)$. Поскольку $x(0) = y(0) = 0$, то функции $x(s) = \int\cos\alpha(s)ds$ и $y(s) = \int\sin\alpha(s)ds$ также определены однозначно. $\blacksquare$

Перейдем теперь к пространственному случаю. Предположим, что $k(s)$ не обращается в нуль ни при каких s (иначе функция $k(s)$ не определена).

Теорема 2.17. *Кривая с данными кривизной и кручением и указанными выше начальными условиями существует и единственна.*

$\square$ Формулы Френе определяют систему векторных дифференциальных уравнений, которая порождает три идентичные системы относительно координатных функций, различаюшиеся только начальными данными. Запишем систему для координаты x, – для y и z они аналогичны. Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\boldsymbol{\varepsilon}_{ix}, \boldsymbol{\varepsilon}_{iy}, \boldsymbol{\varepsilon}_{iz})$. Имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{1x} = k\boldsymbol{\varepsilon}_{2x}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}'_{2x} = -k\boldsymbol{\varepsilon}_{1x} + k\boldsymbol{\varepsilon}_{3x}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}'_{3x} = -k\boldsymbol{\varepsilon}_{2x}. \tag{21}$$

По теореме существования и единственности имеется единственное решение с векторными начальными условиями $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1(s), \boldsymbol{\varepsilon}_2(s), \boldsymbol{\varepsilon}_3(s)\}|_{s=0} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Аналогично плоскому случаю существуют и единственны функции $x(s) = \int\boldsymbol{\varepsilon}_{1x}ds$, $y(s) = \int\boldsymbol{\varepsilon}_{1y}ds$ и $z(s) = \int\boldsymbol{\varepsilon}_{1z}ds$. Но надо ещё убедиться в том, что векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1(s)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2(s)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3(s)$ будут образовывать ортонормированный репер при любых значениях s. Это следствие более общего утверждения, которое сейчас докажем (лемма 2.18). $\blacksquare$

В дальнейшем часто будет использоваться тензорная форма записи формул без знака суммирования.

Лемма 2.18. *Пусть в пространстве V заданы линейно независимые векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n(t)$, такие что при $t = 0$ они ортонормированы. Пусть матрица $C = (c_i^j)$ кососимметрична, где $\boldsymbol{\varepsilon}'_i = c_i^\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$. Тогда векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ будут ортонормированы в любой момент времени.*

$\square$ Пусть $V = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, и этот базис ортонормирован. Разложим $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ по этому базису: $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t) = d_i^\alpha(t)\boldsymbol{e}_\alpha$.

Покажем, что матрица $D := (d_i^\alpha(t))$ ортогональна. Рассмотрим скалярное произведение строк α и β этой матрицы $p(t) = \sum\limits_{i-1}^{n} d_i^\alpha d_i^\beta$. Продифференцировав его, получим

$$p'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^\alpha d_i^\beta\right)' = \sum_{i=1}^{n}(d_i^\alpha)'d_i^\beta + \sum_{i=1}^{n} d_i^\alpha(d_i^\beta)'. \tag{22}$$

Найдём производные элементов матрицы D. Имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_i = (d_i^\alpha)'\boldsymbol{e}_\alpha = c_i^k\boldsymbol{\varepsilon}_k = c_i^k d_k^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha. \tag{23}$$

Приравнивая коэффициенты при векторах $\boldsymbol{e}_\alpha$, получаем, что $(d_i^\alpha)' = c_i^k d_k^\alpha$. Теперь производную скалярного произведения (22) можно записать в виде

$$p'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^k d_k^\alpha d_i^\beta + \sum_{i=1}^{n} d_i^\alpha c_i^k d_k^\beta. \tag{24}$$

Теперь вспомним, что матрица C кососимметрична и $c_i^k = -c_k^i$. Произведём во второй сумме замены индексов суммирования i на k и k на i. Тогда вторая сумма равна первой, взятой с противоположным знаком. Значит, производная скалярного произведения любых двух строк матрицы D равна 0 при любом t, откуда следует, что само скалярное произведение постоянно, т. е. оно совпадает со своим начальным значением. При $t = 0$ матрица ортогональна, значит, она ортогональна и при всех t. ■

3. Теория поверхностей

3.1. Первая квадратичная форма

Рассмотрим произвольную поверхность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2), u^1$ и u^2 — координаты на поверхности, и по определению гладкой поверхности векторы $\boldsymbol{m}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}$ и $\boldsymbol{m}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$ не коллинеарны. Рассмотрим их матрицу Грама:

$$G = G(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_1) & (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2) \\ (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2) & (\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Коэффициенты этой матрицы являются функциями от координат, т. е. $g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2)$. При замене координат $(u^1, u^2) \mapsto (v^1, v^2)$ матрицей перехода будет матрица Якоби $J = \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$ и матрица Грама изменится по формуле $G' = J^t G J$. Элементы новой матрицы будут равны

$$g'_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{m}'_\alpha, \boldsymbol{m}'_\beta) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^\beta}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}\right) = g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}. \tag{2}$$

Найдём угол между двумя пересекающимися кривыми на поверхности с уравнениями $\mathbf{r}(t) = (u^1(t), u^2(t))$ и $\tilde{\mathbf{r}}(\tau) = (\tilde{u}^1(\tau), \tilde{u}^2(\tau))$. Он равен углу между касательными векторами $\boldsymbol{v}$ и $\tilde{\boldsymbol{v}}$, которые равны соответственно

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right) = \frac{du^1}{dt}\boldsymbol{m}_1 + \frac{du^2}{dt}\boldsymbol{m}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}, \frac{d\tilde{u}}{d\tau}\right) = \frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}\boldsymbol{m}_1 + \frac{d\tilde{u}^2}{d\tau}\boldsymbol{m}_2. \tag{3}$$

По формуле для скалярного произведения получаем

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}) =& g_{11}\frac{du^1}{dt}\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau} + \frac{du^2}{dt}\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}\right) + g_{22}\frac{du^2}{dt}\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau}, \\
(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) =& g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}\right) + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2, \\
(\tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\boldsymbol{v}}) =& g_{11}\left(\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}\right)^2 + 2g_{12}\left(\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau}\right) + g_{22}\left(\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau}\right)^2,
\end{aligned}$$

и косинус искомого угла равен

$$\cos\varphi = \frac{(v, \tilde{v})}{|v||\tilde{v}|}. \tag{4}$$

Так как $d\boldsymbol{r} = \mathbf{v}dt$ и $d\tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\mathbf{v}}d\tau$, то формально умножая полученные три равенства на $dtd\tau$, $(dt)^2$, $(d\tau)^2$, соотв., получаем

$$\begin{aligned}
(d\boldsymbol{r}, d\tilde{\boldsymbol{r}}) =& g_{11}du^1d\tilde{u}^1 + g_{12}(du^1d\tilde{u}^2 + du^2d\tilde{u}^1) + g_{22}du^2d\tilde{u}^2, \\
(d\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}) =& g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2, \\
(d\tilde{\boldsymbol{r}}, d\tilde{\boldsymbol{r}}) =& g_{11}(d\tilde{u}^1)^2 + 2g_{12}d\tilde{u}^1d\tilde{u}^2 + g_{22}(d\tilde{u}^2)^2.
\end{aligned}$$

Определение. Квадратичная функция $ds^2 = (dr, dr) = g_{ij}du^i du^j$, определённая на касательных векторах в точках поверхности, называется *первой квадратичной формой* (или *метрикой*) поверхности. Она определяет соответствующую билинейную функцию $(dr, d\tilde{r}) = g_{ij}du^i d\tilde{u}^j$ Таким образом, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{(d\mathbf{r}, d\tilde{\boldsymbol{r}})}{|d\boldsymbol{r}||d\tilde{\boldsymbol{r}}|} = \frac{g_{ij}du^i d\tilde{u}^j}{\sqrt{g_{ij}du^i du^j}\sqrt{g_{ij}d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j}}. \tag{5}$$

Термин "метрика" оправдывается тем, что с помощью первой квадратичной формы вычисляются длины кривых на поверхности, заданных в криволинейных координатах, таких как $(u^1(t), u^2(t))$:

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j = g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j dt^2, \qquad s = \int ds = \int \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}dt.$$

Найдём матрицу Грама при других способах задания поверхности. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$. Тогда $\mathbf{m}_1 = (1, 0, f_x)$ и $\mathbf{m}_2 = (0, 1, f_y)$, значит, матрица Грама имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad g = \det G = 1 + f_x^2 + f_y^2\,. \tag{6}$$

Если же поверхность задана неявной функцией $F(x, y, z) = 0$, то, считая для определённости $F_z \neq 0$, выразим частные производные: $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$ и $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$, и сведём задачу к предыдущей.

3.2. Площади областей

Покажем теперь, как найти площадь области на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$. Координаты u^1 и u^2 образуют сетку на поверхности. Чтобы найти площадь области, найдем площади маленьких параллелограммов со сторонами $\boldsymbol{m}_{1i}\triangle u^1$ и $\boldsymbol{m}_{2i}\triangle u^2$, просуммируем их и перейдём к пределу при $\triangle u \to 0$. Площадь такого параллелограмма равна $S_i = |[\boldsymbol{m}_{1i},\, \boldsymbol{m}_{2i}]|\triangle u_1^i \triangle u_2^i$. В пределе получим

$$S = \iint |[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2]|\, du^1\, du^2. \tag{7}$$

Величина $|[\boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2]|$ равна площади параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$. Как известно, эта площадь равна $\sqrt{g}$, где G — матрица Грама векторов $\boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2,\ g = \det G$. Таким образом, получаем формулу

$$S = \iint \sqrt{|g|}\, du^1\, du^2 = \iint \sqrt{|EG - F^2|}\, du^1\, du^2 = \iint \sqrt{|g_{11}g_{22} - g_{12}^2|}\, du^1\, du^2. \tag{8}$$

В этом выражении элементы матрицы G под интегралом суть функции от координат u^1 и u^2. В частности, если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то, применяя формулу (6), получаем, что площадь области равна

$$S = \iint \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, du^1\, du^2. \tag{9}$$

Как и в случае определения длины кривой, мы можкм *определить* площадь полученным интегральным выражением. Но тогда требуется доказать независимость интеграла от выбора системы координат. Чтобы перейти к новой системе координат, умножим и разделим подинтегральное выражение на якобиан J преобразования, т.е на определитель матрицы Якоби (J) (составленной из производных новых переменных по старым). Матрица скалярного произведения в новой системе координат получается из старой умножением на матрицу Якоби и транспонированную матрицу Якоби. Поэтому $\sqrt{g}$, умноженное на якобиан, есть $\sqrt{g'}$, где g' есть определитель матрицы скалярного произведения в новой системе. В то же время при переходе к новой системе подинтегральное выражение умножается на якобиан обратного преобразования. Таким образом выражение площади в новой системе будет иметь тот же вид.

3.3. Внешняя геометрия и вторая квадратичная форма

Будем теперь изучать поверхность локально в окрестности фиксированной точки A_0. Для этого возьмем нормальный вектор к поверхности $\boldsymbol{n} := \frac{[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2]}{|[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2]|}$ и будем рассматривать все плоскости, содержащие точку A_0 и этот вектор. Сечения поверхности такими плоскостями назовём *нормальными сечениями.* Зафиксируем какой-нибудь единичный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp \boldsymbol{n}$ и рассмотрим нормальное сечение в точке A_0 плоскостью α, натянутой на векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\boldsymbol{n}$. Теперь повернем эту плоскость вокруг $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ на угол $\theta \neq \pi/2$. Обозначим эту плоскость через β. В пересечении поверхности и этой плоскости будет гладкая кривая. Действительно, в соответсвии с теоремой 1.4 зададим поверхность уравнением $F(x, y, z) = 0$. Линия пересечения задается системой

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Поскольку угол поворота θ не равен $\pi/2$, то вектор нормали (A, B, C) к плоскости не коллинеарен вектору $grad\, F$, который параллелен n, и из теоремы о неявных функциях следует, что две из координат, например, y и z, оказываются гладкими функциями третьей: $y = y(x)$, $z = z(x)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y(x), z(x))$, $\dot{\mathbf{r}} = (1, \dot{y}, \dot{z}) \neq 0$. Будем рассматривать кривые, у которых обсуждаемая плоскость $(A_0, \boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1'}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1'|}$ является соприкасающейся. В доказательстве следующей теоремы будем использовать введённые выше обозначения.

Теорема 3.1 (Менье). *Все кривые на поверхности, проходящие через A_0, касающиеся $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и имеющие одну и ту же соприкасающуюся плоскость, имеют одинаковую кривизну в точке A_0.*

☐ Чтобы не путать индексы переменных со степенями, в этом доказательстве обозначим криволинейные координаты буквами u и v вместо u^1 и u^2. Пусть поверхность задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$. Возьмем кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$ с заданной соприкасающейся плоскостью, и пусть t — натуральный параметр. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ для нее — это первый вектор базиса Френе, т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\dot{v} = \dot{u}\boldsymbol{m}_1 + \dot{v}\boldsymbol{m}_2. \tag{11}$$

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ — это второй вектор базиса Френе, он одинаков для всех кривых рассматриваемого класса. Имеем

$$k\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u\, \partial v}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \ddot{u}\boldsymbol{m}_1 + \ddot{v}\boldsymbol{m}_2. \tag{12}$$

Умножим вектор $k\boldsymbol{\varepsilon}_2$ скалярно на $\mathbf{n}$ и учтём, что $(\boldsymbol{m}_i, \mathbf{n}) = 0$. Получим следующее выражение:

$$(k\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{n}) = k\cos\theta = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2}, \boldsymbol{n}\right)\dot{u}^2 + 2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}, \boldsymbol{n}\right)\dot{u}\dot{v} + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^2}, \boldsymbol{n}\right)\dot{v}^2. \tag{13}$$

Коэффициенты при производных не зависят от кривой, $\cos\theta$ тоже одинаковый для всех кривых с данной соприкасающейся плоскостью, величины $\dot{u}$, $\dot{v}$ являются координатами зафиксированного нами вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, следовательно, тоже постоянны. Следовательно, кривизна одинакова для всех кривых с данной соприкасающейся плоскостью. ■

Определение. Кривизна нормального сечения называется *нормальной кривизной* (в направлении, заданном касательной) и она обозначается k_n.

Из теоремы Менье следует, что кривизна произвольного сечения определяется по формуле $k_\theta = \frac{k_n}{\cos\theta}$, а радиусы кривизны связаны соотношением $R_\theta = R_n\cos\theta$, где R_n — радиус кривизны нормального сечения. Центры кривизны для разных углов θ лежат на окружности S с диаметром R_n, перпендикулярным вектору $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, а сами соприкасающиеся окружности образуют сферу. Действительно, если плоскость повернуть на угол θ, то центр кривизны будет на расстоянии $R_\theta = R_n\cos\theta$ от точки A_0, т. е. попадёт на окружность S (в ортогональной к $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ плоскости).

Вывод: важно знать кривизны всех нормальных сечений в точке A_0.

Для кривизны нормального сечения мы получили формулу :

$$k_n = l_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2\,l_{12}\left(\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}\right) + l_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)\dot{v}^2, \quad l_{ij} := \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}\right). \tag{14}$$

Таким образом, k_n – это квадратичная функция от $\frac{du^1}{ds}$ и $\frac{du^2}{ds}$. Для произвольного параметра t имеем $ds = |dr| = |v|dt$, поэтому

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{u}^i}{|v|}. \tag{15}$$

Следовательно, кривизна нормального сечения по направления $v = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ равна

$$k_n = \frac{l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{|v|^2} = \frac{l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} = \frac{l_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j}. \tag{16}$$

Определение. Квадратичная функция $l_{ij}du^i du^j$, определенная на касательных векторах в точках поверхности, называется *второй квадратичной формой поверхности.* Ее матрицу будем обозначать $L = (l_{ij})$,

Осуществим замену координат $(u^1, u^2) \mapsto (v^1, v^2)$ с матрицей перехода $J = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$. Пусть в новом базисе квадратичная форма имеет коэффициенты $l'_{\alpha\beta}$, тогда

$$l'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}, \boldsymbol{n}\right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + \boldsymbol{m}_i\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \tag{17}$$

Следовательно, так как $\boldsymbol{m}_i \perp \boldsymbol{n}$,

$$l'_{\alpha\beta} = l_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \quad \Leftrightarrow \quad L' = J^t L J. \tag{18}$$

Значит, выражение $l_{ij}du^i du^j$ действительно является квадратичной формой. Итак, мы получили, что в любой точке поверхности нормальные кривизны по любым направлениям (du^1, du^2) равны отношению второй и первой квадратичных форм.

Заметим, что в отличие от теории кривых, где всегда $k \geq 0$, величина k_n может иметь знак: в зависимости от направления нормального сечения вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ для этого сечения может совпадать с $\mathbf{n}$ или с $-\mathbf{n}$.

3.4. Главные направления и главные кривизны

Будем вращать плоскость нормального сечения вокруг вектора n, угол поворота обозначим φ. Мы будем получать нормальные кривизны $k_n = k_n(\varphi)$. Эта непрерывная функция периодична с периодом π и имеет максимальное и минимальное значения.

Определение. Максимальное и минимальное значение нормальной кривизны k_n называются *главными кривизнами.* Их направления называются *главными направлениями* (в рассматриваемой точке поверхности).

Теорема 3.2. *В любой точке поверхности или все направления главные (все k_n совпадают), или существует в точности две главные кривизны и в точности два главные направления. Главные направления ортогональны.*

□ Фиксируеи произвольную точку A_0 поверхности. Заметим, что любому преобразованию координат в плоскости $A_0\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$ (переходу к новому базису $A_0\boldsymbol{m}'_1\boldsymbol{m}'_2$) отвечает такое же преобразование криволинейных координат вблизи A_0 на поверхности:

$$\begin{pmatrix} u^1 - u_0^1 \\ u^2 - u_0^2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Здесь C есть матрица перехода от $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ к $\boldsymbol{m}'_1$, $\boldsymbol{m}'_2$. Таким образом, можно перейти к координатам v^1, v^2, для которых репер $\boldsymbol{m}'_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v_i}$, $i = 1, 2$, ортонормирован (в точке A_0). Выберем на поверхности такие координаты (v^1, v^2). В них первая квадратичная форма имеет вид $(dv^1)^2 + (dv^2)^2$, и, следовательно, кривизна равна $k_n = \frac{l_{ij} dv^i dv^j}{(dv^1)^2 + (dv^2)^2}$.

Первая квадратичная форма положительно определена, и по теореме из линейной алгебры существуют координаты (w^1, w^2) на поверхности с ортонормированными в точке A_0 векторами $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w^1}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w^2}$, для которых

$$k_n = \frac{\lambda_1 (dw^1)^2 + \lambda_2 (dw^2)^2}{(dw^1)^2 + (dw^2)^2} = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2\varphi. \qquad (19)$$

Здесь φ – угол наклона вектора (dw^1, dw^2) к вектору $\boldsymbol{m}''_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w^1}$. Следовательно, k_n заключено между λ_1 и λ_2 – это и есть главные кривизны (они единственны). Направления векторов базиса $\boldsymbol{m}''_l$, $\boldsymbol{m}''_2$ являются главными направлениями, откуда следует второе утверждение теоремы. ■

Формула (19) называется *формулой Эйлера.*

Определение. Точки поверхности классифицируются при помощи главных кривизн следующим образом:

1. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то точка поверхности называется *сферической* (все направления главные).

2. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то точка поверхности называется *эллиптической.* В силу следствия 2.7 вблизи A_0 поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости.

3. Если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то точка поверхности называется *гиперболической.* Поверхность расположена по разные стороны от касательной плоскости.

4. Если $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, то точка называется *параболической.*

5. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то точка поверхности называется *точкой уплощения.* В этом случае $L = 0$ (вторая квадратичная форма в этой точке равна нулю).

Определение. *Гауссовой кривизной* называется произведение главных кривизн, $K := \lambda_1\lambda_2$. *Средней кривизной* называется сумма (иногда полусумма) главных кривизн. Главные кривизны λ_1, λ_2 – инварианты второй квадратичной формы.

3.5. Вычисление главных кривизн и направлений

Теорема 3.3. *Главные кривизны* λ_1, λ_2 *являются корнями уравнения* $\det(L - \lambda G) = 0$.

$\square$ Числа λ_1, λ_2 – инварианты квадратичной формы $l_{ij}du^i du^j$. В ортонормированных координатнах в силу теоремы из линейной алгебры числа λ_1, λ_2 являются корнями характеристического многочлена $p(\lambda) = \det(\tilde{L} - \lambda E)$, где $\tilde{L}$ – матрица второй квадратичной формы в ортонормированном базисе.

Пусть теперь наши координаты u^1 и u^2 произвольны, а v^1 и v^2 – координаты в окрестности A_0, для которых векторы $\boldsymbol{m}_1'$, $\boldsymbol{m}_2'$ ортонормированы. Пусть J — матрица перехода от ортонормированного базиса к нашему $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ (матрица Якоби). Тогда

$$J^t(\tilde{L} - \lambda E)J = L - \lambda G \Rightarrow p(\lambda) = \frac{\det(L - \lambda G)}{\det(J^t J)} = \frac{\det(L - \lambda G)}{\det G}. \tag{20}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $L = J^t L' J$, $G = J^t G' J$, где $G' = E$). В результате мы получаем, что корни характеристического многочлена в ортонормированном базисе (а они и есть главные кривизны) совпадают с корнями уравнения $\det(L - \lambda G) = 0$, что и требовалось. $\blacksquare$

Следствие 3.4. *Поскольку произведение корней характеристического многочлена* $p(\lambda)$ *равно его свободному члену, получаем формулу для гауссовой кривизны:*

$$K = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\det L}{\det G}. \tag{21}$$

Теорема 3.5. *Главные направления, соответствующие* λ_i, *удовлетворяют уравнениям*

$$(L - \lambda_i G)\begin{pmatrix} du^i \\ du^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Здесь $\left(\begin{smallmatrix} du^1 \\ du^2 \end{smallmatrix}\right)$ – координаты вектора в локальном базисе m_1, m_2.

$\square$ Будем действовать аналогично предыдущей теореме. Пусть v_1, v_2 — некоторые координаты на поверхности. Если бы векторы $\boldsymbol{m}_1', \boldsymbol{m}_2'$ в точке A_0 были ортонормированны, то в этом случае мы из линейной алгебры знаем, что главные направления удовлетворяют уравнениям $(\tilde{L} - \lambda_i E)\left(\begin{smallmatrix} dv^1 \\ dv^2 \end{smallmatrix}\right)$.

Пусть теперь координаты u^1 и u^2 произвольны, а v^1 и v^2 – координаты, указанные выше. Пусть J — матрица перехода от координат v^1, v^2 к нашим. Тогда $\left(\begin{smallmatrix} dv^1 \\ dv^2 \end{smallmatrix}\right) = J\left(\begin{smallmatrix} du^1 \\ du^2 \end{smallmatrix}\right)$, и равенство, которому удовлетворяют главные направления, перепишется в виде: $(\tilde{L}-\lambda_i G)J\binom{du^1}{du^2}=\binom{0}{0}$. Домножим обе части равенства на J^t слева, получим $J^t(\tilde{L}-\lambda_i G)J\binom{du^1}{du^2}=\binom{0}{0}$, то есть $(L-\lambda_i G)\binom{du^1}{du^2}=\binom{0}{0}$. ■

Зная коэффициенты матриц G и L, можно найти главные кривизны и направления. Вспомним, чему равны коэффициенты квадратичных форм:

$$g_{ij}=(\boldsymbol{m}_i,\boldsymbol{m}_j),\; l_{ij}=\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^j},\vec{n}\right)=\frac{\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^j},[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2]\right)}{\left|[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2]\right|}=\frac{\left\langle \boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^j}\right\rangle}{\sqrt{|G|}} \qquad (23)$$

Рассмотрим случай, когда поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$. Тогда $\boldsymbol{m}_1=(1,0,f'_x)$, $\boldsymbol{m}_2=(0,1,f'_y)$, $\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial x^2}=(0,0,f''_{xx})$, $\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial x\partial y}=(0,0,f''_{xy})$, $\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial y^2}=(0,0,f''_{yy})$, поэтому

$$L=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\cdot\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\ f_{xy}&f_{yy}\end{pmatrix},\quad |L|=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2},\quad K=\frac{|L|}{|G|}=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}. \quad (24)$$

Если главными направлениями являются оси Ox и Oy, то $f'_x=f'_y=0$. $f_{xy}=l_{12}=0$, $l_{11}=\lambda_1=f_{xx}$, $l_{22}=\lambda_2=f_{yy}$. $|L|=f_{xx}f_{yy}$, $|G|=1$, $K=f_{xx}f_{yy}$.

3.6. Сферическое (гауссово) отображение

Пусть задана плоская кривая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. Рассмотрим вектор нормали $\boldsymbol{n}(s)$ к этой кривой, перенесём его в центр единичной окружности. Получится кривая $\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{n}(s)$ на этой окружности. Кривизна $k(s)$ кривой равна α'_s, где α — угол между касательным вектором и осью Ox (см. п. 2.6). Имеем $\alpha'_s=\lim\frac{\triangle\alpha}{\triangle s}$. Здесь $\triangle s$ – длина дуги кривой $\boldsymbol{r}(s)$, $\triangle\alpha$ – угол от $\boldsymbol{\varepsilon}_1(s)$ до $\boldsymbol{\varepsilon}_1(s+\triangle s)$, равный углу от $\boldsymbol{n}(s)$ до $\boldsymbol{n}(s+\triangle s)$. Почстроенное отображение кривой на окружность назовем *круговым отображением* кривой. Кривизна кривой есть предел отношения приращения дуги на окружности к приращению на кривой, $k=\frac{d\tilde{s}}{ds}$.

Аналогичное отображение существует и для поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Определение. Рассмотрим поверхность $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ и единичный вектор $\boldsymbol{n}:=\frac{[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2]}{|[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2]|}$. Сопоставим точке поверхности конец вектора $\boldsymbol{n}$, лежащий на единичной сфере. Такое отображение называется *сферическим.*

При помощи сферического отображения выведем ещё один геометрический смысл гауссовой кривизны.

Теорема 3.6. *Рассмотрим область малой площади $\triangle S$ на поверхности и $\triangle\tilde{S}$ – площадь образа этой области на сфере при сферическом отображении. Тогда* $\lim\limits_{\triangle S\to 0}\frac{\triangle\tilde{S}}{\triangle S}=K$.

□ Возьмём «хорошую» систему координат, т. е. такую, что уравнение поверхности имеет вид $z=f(x,y)$, Oxy – касательная плоскость в точке $O=f(0,0)$ и направления Ox, Oy являются главными. Тогда площадь куска поверхности равна $\triangle S=\iint\limits_{\Omega}|[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2]|\,dxdy$, где Ω – область изменения параметров, $\boldsymbol{m}_1=(1,0,f'_x)$, $\boldsymbol{m}_2=(0,1,f'_y)$. Найдём координаты сферического образа куска поверхности. Обозначив через L число $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$, имеем

$$\tilde{r}:=\vec{n}=\frac{[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2]}{|[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2]|}=(-f_x,-f_y,1)\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}=(-f_x,-f_y,1)\frac{1}{L}. \qquad (25)$$

Найдём векторы частных производных:

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_1 := \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} = \left(\frac{1}{L}\right)'_x (-f_x, -f_y, 1) + \frac{1}{L}(-f_{xx}, -f_{yx}, 0), \tag{26}$$

$$\tilde{\boldsymbol{m}}_2 := \frac{\partial \tilde{r}}{\partial y} = \left(\frac{1}{L}\right)'_y (-f_x, -f_y, 1) + \frac{1}{L}(-f_{xy}, -f_{yy}, 0), \tag{27}$$

Отсюда, воспользовавшись теоремой о среднем, получаем в начале координат

$$\lim_{\triangle S \to 0} \frac{\triangle \tilde{S}}{\triangle S} = \lim_{\triangle S \to 0} \frac{\iint |[\tilde{\boldsymbol{m}}_1,\, \tilde{\boldsymbol{m}}_2]|\, dx\, dy}{\iint |[\boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2]|\, dx\, dy} = \frac{|[\tilde{\boldsymbol{m}}_1,\, \tilde{\boldsymbol{m}}_2]|}{|[\boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2]|} \tag{28}$$

В начале координат $f_x = f_y = f_{xy} = 0$ и $[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2] = (0, 0, 1)$. Значит, $|[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2]| = 1$, а $\tilde{\boldsymbol{m}}_1 = (-\lambda_1, 0, 0)$ и $\tilde{\boldsymbol{m}}_2 = (0, -\lambda_2, 0)$, поскольку $\left(\frac{1}{L}\right)'_x = \left(\frac{1}{L}\right)'_y = 0$ и $f''_{xx} = \lambda_1$, $f''_{yy} = \lambda_2$ (см. п. 3.5). Таким образом, $[\tilde{\boldsymbol{m}}_1,\, \tilde{\boldsymbol{m}}_2] = (0, 0, \lambda_1\lambda_2)$, $|[\tilde{\boldsymbol{m}}_1,\, \tilde{\boldsymbol{m}}_2]| = |\lambda_1\lambda_2| = |K|$. ■

4. Криволинейные координаты. Метрика Римана

4.1. Криволинейные координаты в n-мерном пространстве

Возьмем некоторую область $O \subset \mathbb{R}^n$, имеется взаимно-однозначное соответствие между ее точками и наборами координат: $A \leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n)$. Вопрос: возможны ли ещё другие взаимно однозначные соответствия $A \leftrightarrow (u^1, \ldots, u^n)$ для каких-то наборов числовых параметров $u^1, \ldots, u^n$, согласованные с имеющимся соответствием?

Примеры полярных координат $(\rho,\, \varphi)$ на плоскости, цилинрических $(\rho,\, \varphi, z)$ и сферических $(\rho,\, \varphi, \theta)$ в $\mathbb{R}^3$ показывают, что это возможно, по крайней мере для небольших областей O.

Если указанное соответствие определено, то вблизи $A \in O$ возникает и взаимно однозначное соответствие $(x^1, \ldots, x^n) \leftrightarrow (u^1, \ldots, u^n)$. В этом случае u^i оказываются функциями $u^i(x^1, \ldots, x^n)$ (и наоборот – $x^j = x^j(u^1, \ldots, u^n)$. Для наших задач естественно требовать, чтобы те и другие функции были гладкими. В этом случае определены матрицы Якоби $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\}$ и $\mathcal{J} = \{\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\}$ и они оказываются взаимнообратными – тогда взаимнообратны и отличны от нуля и их определители.

Наличие взаимно однозначного соответствия $(x^1, \ldots, x^n) \leftrightarrow (u^1, \ldots, u^n)$, во всяком случае локального, является следствием гладкости функций $u^i = u^i(x^1, \ldots, x^n)$ и невырожденности матрицы J, поскольку из условия $\det J \neq 0$ в силу теоремы о неявных функциях следует обратимость соответствия $(x^1, \ldots, x^n) \leftrightarrow (u^1, \ldots, u^n)$, т.е. наличие гладких функций $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^n)$, обращающих это соответствие.

Определение. Под криволинейными координатами в окрестности точки $A_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ понимаются гладкие функции $u^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, u^n(x^1, \ldots, x^n)$, определённые в окрестности A_0 и такие, что матрица Якоби J невырождена (если она невырождена в точке, то и в некоторой окрестности точки).

Замечание. Параметры $u^1, \ldots, u^n$ заполняют некоторую область $U \subset \mathbb{R}^n$. В самом деле, поскольку имеется гладкое отображение $(u^1, \ldots, u^n) \to (x^1, \ldots, x^n)$, то прообразы окрестностей точки $A_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ составят окрестности набора $(u_0^1, \ldots, u_0^n)$ – прообраза $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Таким образом, задание криволинейных координат в содержащей A_0 области O эквивалентно заданию диффеоморфизма этой области на некоторую область $U \subset \mathbb{R}^n$ изменения параметров $u^1, \ldots, u^n$.

Под координатной u^i-линией в области O понимается множество точек с постоянными координатами u^j для $j \neq i$. Эта линия правильно параметризована: вектор

$\boldsymbol{m}_i = (\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i})$ отличен от ненулевого как столбец матрицы $\mathcal{J}$. В нашей точке области O векторы $\boldsymbol{m}_1, \dots, \boldsymbol{m}_n$ составляют локальный базис.

Любая гладкая кривая $r(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ имеет гладкое описание $(u^1(t), \dots, u^n(t))$ в криволинейных координатах как $u^i(x^1(t), \dots, x^n(t)))$.

Предложение 4.1. *Набор* $(\dot{u}^1, \dots \dot{u}^n)$ *– координаты вектора* $v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ *в локальном базисе* $\boldsymbol{m}_1, ..., \boldsymbol{m}_n$. (В самом деле, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt} = \dot{u}^i \boldsymbol{m}_i$.) ■

Если $(v^1, \dots v^n)$ – другие криволинейные координаты в окрестности A_0, то из обратимостей $(u^1, \dots, u^n) \leftrightarrow (x^1, \dots, x^n) \leftrightarrow (v^1, \dots, v^n)$ следует, что $u^i = u^i(v^1, \dots, v^n)$ – гладкие функции, и аналогично $v^j = v * j(u^1, \dots, u^n)$.

Имеются матрицы Якоби $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$ и $\mathcal{J} = \{\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\}$.

Теорема 4.2. J *– матрица перехода от локального базиса* $\boldsymbol{m}_1, \dots, \boldsymbol{m}_n$ *к новому базису* $\boldsymbol{m}'_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^j}$, $j = 1, \dots, n$. (В самом деле, $\boldsymbol{m}'_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$.) ■

Аналогично, $\mathcal{J}$ – матрица перехода от второго базиса к первому, $\mathcal{J} = J^{-1}$. Заметим, что такова картина в каждой точке, где определены и те и другие криволинейные координаты.

В определении криволинейных координат предполагалось, что их число равно $n = \dim \mathbb{R}^n$. Нельзя ли ввести криволинейные координаты $v^1, \dots, v^m$ в числе $m \neq n$?

Теорема 4.3. *Число* m *обязательно равно* n.

□ В самом деле, если $m \neq n$, то одно из них больше, пусть это будет, например, m. Квадратная матрица $\{\frac{\partial v^i}{\partial v^j}\} = E$ – единичная, порядка $m \times m$. Но $\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = \frac{\partial v^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^j}$, т.е. $E = \mathcal{J} J$ – произведение прямоугольных $(m \times n)$ матриц ранга $n < m$ и имеет порядок $n \times n$. ■

Следствие 4.4. (***инвариантность размерности евклидова пространства***). *При* $m \neq n$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^m$ *не диффеоморфны.*

□ Как указано выше, задание диффеоморфизма эквивалентно введению криволинейных координат, ■

4.2. Криволинейные координаты на k-поверхности в $\mathbb{R}^n$

Определение. Фигура M^k в $\mathbb{R}^n$ (множество точек) называется *k-мерной поверхностью* (геометрическим многообразием размерности k), если вблизи каждой своей точки она допускает параметризацию вида:

1° $\boldsymbol{r} = (x^1, \dots, x^n)$, где $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$ – гладкие функции;

2° Векторы $\boldsymbol{m}_i := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}$, $i = 1, \dots, k$, линейно независимы, т. е. матрица Якоби (1) имеет ранг k.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Заметим, что всегда $k \leq n$. Случай $k = n$ – это область в $\mathbb{R}^n$ с криволинейными координатами $(u^1, \dots, u^n)$, см п. 4.1. При $k = 1$ получается гладкая кривая, при $k = 2$ – гладкая поверхность. В силу тех же аргументов, что и в п. 1.3 (матрица J имеет ранг k), некоторые k функций x^i обратимы, например, $x^1, \dots, x^k$, и для точек M^k возникает взаимно однозначное соответствие $(x^1, \dots, x^k) \leftrightarrow (u^1, \dots, u^k) \leftrightarrow (x^1, \dots, x^n) \in M^k$, так что $u^1, \dots, u^k$ будут локальными координатами на поверхности — это следует из теоремы о неявных функциях.

Рассмотрим локальный базис $(\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k)$, зависящий от точки. Если заданы другие координаты $(v^1, \ldots, v^k)$, то согласно сказанному $(u^1, \ldots, u^k)$ – гладкие функции от $(v^1, \ldots, v^k)$ и наоборот. При этом матрица Якоби $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$ является матрицей перехода от $\mathbf{m}^i$ к $\mathbf{m}'_i$:

$$\mathbf{m}'_i = \frac{\partial r}{\partial v^i} = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} = \mathbf{m}_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}. \tag{2}$$

Аналогично трёхмерному случаю определяются координатные линии: фиксируем все координаты, кроме одной. Получается правильно параметризованная кривая на поверхности, так как её касательный вектор есть один из векторов $\mathbf{m}_i$, который всегда ненулевой.

Теорема 4.5. *Размерность k многообразия определена однозначно.*

□ Пусть одно и то же многообразие задаётся двумя уравнениями: $r = r(u^1, \ldots, u^k)$ и $r = r(v^1, \ldots, v^l)$. По указанным только что причинам $(u^1, \ldots, u^k)$ – гладкие функции от $(v^1, \ldots, v^l)$, и наоборот.

Допустим, что $k > l$. Тогда

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta^i_j = \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^j}. \tag{3}$$

Поскольку $rk\,(A \times B) \leq \min(rk\,A,\, rk\,B)$, получаем противоречие: матрица слева — единичная ранга k, а справа — строго меньше k. ■

Многообразие также можно задавать в неявной форме. Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \qquad \ldots \\ F_p(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

и все функции гладкие. Если в каждой точке, удовлетворяющей системе, матрица Якоби $J = \left\{\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right\}$ имеет полный ранг, то решением системы является многообразие размерности $n - p$. Покажем, что это эквивалентное определение. Будем считать, что минор ранга p находится в правой части матрицы J. Тогда по теореме о неявном отображении существует выражение последних p координат через первые $k := n - p$ координат. Примем координаты $x^1, \ldots, x^k$ за параметры и получим требуемое: $r = r(x^1, \ldots, x^k)$. Матрица Якоби будет невырожденной, так как

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, \overset{k}{0}, *, \ldots, *). \tag{5}$$

Рассмотрим кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ на многообразии, заданном уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, \ldots, u^k)$. Касательный вектор к кривой в базисе x^i имеет координаты $(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^k)$. Тогда в локальном базисе этот вектор имеет координаты $(\dot{u}^1, \ldots, \dot{u}^n)$. В самом деле, имеем $v = \frac{dr}{dt} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^k) - (\frac{\partial x^1}{\partial u^i}\dot{u}^1, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i}\dot{u}^i) = \mathbf{m}_i \dot{u}^i$.

Теорема 4.6. *Координаты на k-мерном многообразии всегда можно расширить до координат во всём пространстве $\mathbb{R}^n$ так, что некоторая окрестность многообразия будет задаваться в этих координатах системой $u^{k+1} = \ldots = u^n = 0$.*

□ К векторам $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k$ в точках A на многообразии с координатами $(u^1, \ldots, u^k)$ добавим векторы $\boldsymbol{m}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{m}_n$, $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{m}_i(u^1, \ldots, u^k)$, таким образом, чтобы $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n$

были линейно независимы. Это можно сделать многими способами, например, в малой окрестности некоторой точки A_0 их можно взять постоянными. Посредством процесса ортогонализации, можно, оставив при $i \le k$ прежние векторы $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k$, заменить остальные, которые составят в каждой точке A базисы ортогональных дополнений к линейным оболочкам $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k$.

Далее положим $\mathbf{r} = r(u^1, \ldots, u^k) + u^{k+1}\boldsymbol{m}_{k+1} + \ldots + u^n \boldsymbol{m}_n$, где $\mathbf{r}(u^1, \ldots, u^k)$ – радиус вектор k-поверхности.

Утверждаем, что $u^1, \ldots, u^n$ – криволинейные координаты вблизи поверхности (которая, очевидно, реализуется системой $u^{k+1} = \ldots = u^n = 0$). В самом деле, $\frac{\partial r}{\partial u^i} + \sum_{l=k+1}^n u_j \frac{\partial \boldsymbol{m}_j}{\partial u^i} = \widetilde{\boldsymbol{m}}_i$ при $i \le k$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \boldsymbol{m}_j$ при $j > k$. Очевидно, что при малых $u^{k+1}, \ldots, u^n$ векторы $\widetilde{\boldsymbol{m}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{m}}_k, \boldsymbol{m}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{m}_n$ линейно независимы, т.е. выполнено условие, фигурирующее в п. 4.1 выше. ■

Заметим, что векторы $\widetilde{\boldsymbol{m}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{m}}_k$ в предыдущей теореме определены не только на поверхности, но и в её окружении, а на самой поверхности превращаются в $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k$.

4.3. Евклидова метрика в криволинейных координатах

Евклидова метрика в криволинейных координатах – это форма записи обычного скалярного произведения в координатах, не являющихся не только ортонормированными, но даже и аффинными. Ее теория – полный аналог описания первой квадратичной формы поверхностей.

В криволинейных координатах $u^1, \ldots, u^n$ возникают локальные базисы $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n$, $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ (см. п. 4.1). Матрица Грама $G = (\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j)$ скалярного произведения в этих базисах не постоянна, $G = G(u^1, \ldots, u^n)$. Пусть, как и в случае поверхностей, $(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j) = g_{ij} = g_{ij}(u^1, \ldots, u^n)$. Поскольку при переходе к новым координатам $(v^1, \ldots, v^n)$ матрицей перехода к базису $\boldsymbol{m}'_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^i}$ служит матрица Якоби $J = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$, имеем закон преобразования матриц Грама: $G' = J^t G J$. В тензорной форме $g'_{ij} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}$. В самом деле $g'_{ij} = (\boldsymbol{m}'_i, \boldsymbol{m}'_j) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v^j}\right) = (\boldsymbol{m}_\alpha, \boldsymbol{m}_\beta)\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}$.

Поскольку для кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ возможна запись $(u^1(t), \ldots, u^n(t))$, см. п. 4.1, причём $(\dot{u}^1, \ldots, \dot{u}^n)$ – координаты $v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ в базисе $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n$ (взятом в точке $\boldsymbol{r}(t)$), имеем $|v| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}$. Длина дуги запишется как $s = \int \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}dt = \int \sqrt{g_{ij}\, du^i du^j}$.

Таким образом, достаточно знать $ds = |v|dt$, или $ds^2 = |v|^2 dt^2$, $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ (так как для конкретных $(u^1(t), \ldots, u^n(t))$ имеем $du^i = \dot{u}^i dt$).

Для криых $\boldsymbol{r}(t), \tilde{\boldsymbol{r}}(\tau)$, пересекающихся в точке, в терминах криволинейных координат вычисляется угол пересечения:

$$\cos\varphi = \frac{(d\boldsymbol{r},\, d\tilde{\boldsymbol{r}})}{\sqrt{g_{ij}\, du^i du^j}\sqrt{g_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j}}$$

Ещё один способ получения преобразования членов g_{ij} при переходе к новым координатам: $ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}dv^i \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}dv^j = (g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j})dv^i dv^j$

Приведённые выкладки ничем не отличаются от применявшихся в теории поверхностей по отношению к первой квадратичной форме.

Добавим, что в криволинейных координатах можно вычислять и объёмы.

Известно, что объём области $W \subset \mathbb{R}^n$ вычисляется как $V = \int \ldots \int_W dx^1 \ldots dx^n$. При переходе к криволинейным координатам (в терминах анализа – при замене переменных $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^n)$), как известно из курса анализа, $V = \int \ldots \int_W |J| du^1 \ldots du^n$, где J – матрица Якоби $\left\{\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right\}$. В прямоугольных координатах $G = E$, при переходе к $(u^1, \dots, u^n)$ имеем $G' = J^t E J = J^t J$. Таким образом, окончательно $V = \int \dots \int_W \sqrt{|G|} du^1 \dots du^n$, где G – матрица Грама (переменная) в базисах $m_1, \dots, m_n$, $m_i = m_i(u^1, \dots, u^n)$. Понятно, что в ортонормированных координатах $G = E$ – единичная матрица, а в любых аффинных G – постоянная матрица.

Предложение 4.7.

1. *$G = E$ тогда и только тогда, когда координаты – стандартные ортонормированные;*

2. *матрица G постоянна только для обычных аффинных координат.*

$\square$ В самом деле, пусть в некоторых (возможно, криволинейных) координатах $u^1, \dots, u^n$ в области $O \subset \mathbb{R}^n$ оказалось, что $G = E$. Рассмотрим “карту” в O – область U изменения параметров $u^1, \dots, u^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, где $u^1, \dots, u^n$ – уже стандартные ортонормированные координаты. Дано, что соответствие $U \leftrightarrow O$ есть изометрия. При изометрии кратчайшим линиям в U отвечают кратчайшие в O, следовательно, u^i-линиям в U (параллельным координатным осям) отвечают кратчайшие в O. Таким образом, u^i-линии в O суть прямые. Поскольку $|m_i| = \sqrt{g_{ii}} = 1$, и $(m_i, m_j) = g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то координаты в O – обычные ортонормированные.

Если матрица Грама постоянна, то (с учётом её симметрии и положительной определённости) найдётся матрица перехода C такая что $G' = C^t G C = E$. Рассмотрим замену координат u^i линейными выражениями от $v^1, \dots, v^n$, определяемыми строками C (для этой замены $J = C$). По доказанному выше $v^1, \dots, v^n$ – ортонормированные координаты. Следовательно, $u^1, \dots, u^n$ – аффинные координаты, получаемые при обратной линейной замене $v^1, \dots, v^n$. $\blacksquare$

Рассмотрим примеры криволинейных координат.

1° *Полярные координаты:*

$\mathbf{r} = (x, y)$, $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $\mathbf{m}_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\mathbf{m}_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\rho \sin\varphi, \rho\cos\varphi)$, $G = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{smallmatrix}\right)$; $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$. Якобиан вырожден в начальной точке.

2° *Цилиндрические координаты:*

$\mathbf{r} = (x, y, z)$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $\mathbf{m}_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\mathbf{m}_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$, $\mathbf{m}_3 = \frac{\partial r}{\partial z} = (0, 0, 1)$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. Матрица Якоби вырождена для точек оси Oz.

3° *Сферические координаты: ρ – расстояние точки от начала координат, φ – полярный угол проекции точки на Oxy, θ – угол r с осью Oz.*

$\mathbf{r} = (x, y, z)$, $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$,
$\mathbf{m}_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$, $\mathbf{m}_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \cos\theta)$,
$\mathbf{m}_3 = \frac{\partial r}{\partial \theta} = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta)$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Здесь $\det G = \rho^4 \sin^2\theta = |J^t J|$, поэтому $\det J = \rho^2 \sin\theta$. Матрица Якоби вырождена для точек оси Oz.

4.4. Первая квадратичная форма (метрика) k-поверхности в $\mathbb{R}^n$

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \ldots, u^k)$ – гладкая k-поверхность в $\mathbb{R}^n$. В соответствии с теоремой 4.6 п.4.2 вблизи любой точки криволинейные координаты $(u^1, \ldots, u^k)$ включаются в криволинейные координаты $u^1, \ldots, u^k, u^{k+1}, \ldots, u^n$ окрестности этой точки в R^n. Пусть G – матрица евклидовой метрики в этой окрестности. Её верхний левый $(k \times k)$-квадрат G_k, состояший из членов $g_{ij}(u^1, \ldots, u^n\, 0, \ldots 0)$, является, очевидно, матрицей Грама векторов $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k$, касательных к поверхности, $\mathbf{m}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, i \leq k$. При переходе к другим координатам $(v^1, \ldots, v^k)$ на k-поверхности матрица преобразуется по закону $G'_k = J_k^t G_k J_k$, где J_k – матрица Якоби $\left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$, $i, j \leq k$. (Поскольку $g_{ij} = (\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j)$, $g'_{ij} = (\mathbf{m}'_i, \mathbf{m}'_j)$).

Матрица G_k – это матрица ограничения обычного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ на векторах, касательных к k-поверхности. Поэтому она свободно используется для тех же целей, что и матрица G в $\mathbb{R}^n$ (или матрица G первой квадратичной формы поверхности в $\mathbb{R}^3$), но только для кривых и фигур, расположенных на k-поверхности. В частности, для выражения квадрата дифференциала длины дуги: $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$, $1 \leq i, j \leq k$ и т.п. Объём k-мерной области W, расположенной на k-поверхности, определеяется интегралом $W = \int \ldots \int \sqrt{|G_k|} du^1 \ldots du^k$ (ср. следующий параграф).

Аналогично (ср. п.4.3 и п. 3.1) получается тензорное выражение $g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}$ для преобразования членов матриц G_k, G'_k при переходе к другим криволинейным координатам ($1 \leq i, j,\ \alpha, \beta \leq k$).

Выражение $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ называется *метрикой* (или *первой квадратичной формой*) k-поверхности в $\mathbb{R}^n$.

4.5. Риманова метрика

Определение. В области U с криволинейными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$ задана *риманова метрика*, если:

1°. В каждой точке $x \in U$ задана симметричная положительно определённая матрица $G = g_{ij}(x)$;

2°. Функции $g_{ij}(x)$ гладкие (по стандартным координатам $(x^1, \ldots, x^n)$ или, эквивалентно, по $(u^1, \ldots, u^n)$;

3°. При переходе к другим координатам $(v^1, \ldots, v^n)$ матрица G преобразуется по правилу $G' = J^t G J$, где J – матрица Якоби, $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$.

В этом случае для любой пары векторов **a, b**, имеющих общее начало в любой точке $x \in U$ (с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ или с криволинейными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$) определено скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij}(u^1, \ldots, u^n) a^i b^j$, где $(a^1, \ldots, a^n)$, $(b^1, \ldots, b^n)$ – координаты **a** и **b** в локальном базисе $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n$ в точке x, $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, $i = 1, \ldots, n$. Для самих векторов $\boldsymbol{m}_i$, имеющих координаты вида $(0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0)$, $(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j) = g_{ij}$ – в этом геометрический смысл компонент g_{ij}.

Если иметь в виду задание матрицей $G = G(u^1, \ldots, u^n)$ скалярных произведений, то требование **3°**. определения, данного выше – следствие требований **1°**. и **2°**.

Может показаться, что рассматриваемое определение ничем не отличается от описания в криволинейных координатах евклидова скалярного произведения (стандартной метрики Евклида, п. 4.3). Отличие однако есть, причём очень существенное. Для ситуации, описанной в п. 4.3, найдутся координаты (аффинные, ортогональные), в которых матрицы оказываются не зависящими от параметров $(u^1, \ldots, u^n)$, т.е. постоянными. Для римановых метрик это типично не так, указанных координат типично не существует!

Так же, как и в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$, как в п. 4.3 и 4.4, тензор G может быть использован для вычисления длин дуг различных линий, косинуса угла между пересекающимися кривыми в U, для вычисления объёмов расположенных в U фигур. Однако, в отличие от предыдущих ситуаций, где все перечисленные объекты нам знакомы и названные задачи не вызывают сомнений, в данной новой ситуации мы должны проверять корректность даваемых определений – независимость от использованных криволинейных координат и от способов параметризации кривых.

Независимость от координат величин, использующих скалярные произведения векторов (в частности, модулей векторов) – следствие из линейной алгебры (законы преобразования матрицы G и координат векторов). Независимость длины дуги от параметризации вытекет из того, что $ds = \frac{dr}{dt}dt = \frac{dr}{d\tau}\tau'_t dt = \frac{dr}{d\tau}d\tau$. В формуле $\cos\varphi = \frac{(dr,d\tilde{r})}{|dr||d\tilde{r}|}$, появляющиеся при замене параметров на кривых одинаковые множители в числителе и знаменателе сокращаются.

Объём V в римановой метрике не зависит от выбора координат, так как если $G' = J^tGJ$, то $V =$

$$\int\limits_{\omega} \sqrt{|G'|}dv^1 \dots dv^n = \int\limits_{\omega} \sqrt{|J^t||G||J|}dv^1 \dots = \int\limits_{\omega} \sqrt{|G|}\underbrace{|J|dv^1 \dots}_{\text{замена}} = \int\limits_{\omega} \sqrt{|G|}du^1 \dots du^n. \tag{6}$$

Примерами римановых метрик являются:

1. Евклидова метрика в криволинейных координатах;

2. Первая квадратичная форма поверхности, рассматриваемая на карте;

3. Аналогично – первая квадратичная форма k-поверхности, отнесённая к области изменения криволинейных координат $u^1, \dots, u^k$.

В 2, 3 метрики индуцированы евклидовой метрикой объемлющего поверхность пространства. В псевдоевклидовом пространстве на поверхности также может индуцироваться риманова метрика.

4.6. Изометрия метрик

Определение. Пусть даны области $U, \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ с метриками Римана G и $\widetilde{G}$ соответственно. Говорят, что метрики G и $\widetilde{G}$ *изометричны*, если существует диффеоморфизм областей U и $\widetilde{U}$, сохраняющий длины кривых.

Например, изометричны две карты в $\mathbb{R}^k$ одного и того же участка поверхности $M^k \subset \mathbb{R}^n$ с фиксированной римановой метрикой. Здесь требуемый диффеоморфизм – преобразование координат. Однако метрики в картах берутся не стандартные в $\mathbb{R}^k$, а индуцированные отображениями карт.

Более общим образом, две k-поверхности M_1^k, M_2^k в $\mathbb{R}^n$ изометричны, если существует диффеоморфизм $\Phi : M_1 \to M_2$ (*изометрия*), сохраняющий длины кривых (т.е. длина $\Phi(l) =$ длина l, где l – дуга в M_1).

Теорема 4.8. *Метрики G в M_1 и $\widetilde{G}$ в M_2 изометричны $\Leftrightarrow$ существует диффеоморфизм $\Psi : M_1 \to M_2$ сохраняющий метрику, т.е. для любой пары векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ в точке $x_0 \in M_1$ $g_{ij}a^ib^j = \tilde{g}_{ij}(d\Phi\,\boldsymbol{a})^i(d\Phi\,\boldsymbol{b})^j$.*

Пусть имеется диффеоморфизм $\Psi : M_1 \to M_2$ с указанным свойством. Рассмотрим карту $\varphi : U \to V$, где U окрестность точки $A \in M_1$, а V – область в пространстве $\mathbf{R}^k$. Диффеоморфизм $\varphi\Psi^{-1}$ является картой в окрестности $\Psi(U) = \widetilde{U}$ точки

$B = \Psi(A)$ с той же координатной областью V, причем соответствующим точкам при диффеоморфизме Ψ отвечает одна и та же точка в V. Более того, базисные векторы в точке $x \in U$ (образы стандартного базиса в $\varphi(x) \in V$) дифференциал $d\Psi$ взаимнооднозначно переводит в базисные векторы в точке $\Psi(x)$. В таком случае, по условию, метрики G и $\widetilde{G}$ имеют одинаковые коэффициенты – скалярные произведения базисных векторов. Поэтому вычисление длин соответствующих двух дуг сведется к одному и тому же интегралу.

Пусть теперь дан диффеоморфизм Φ, сохраняющий длины гладких кривых. Мы снова можем считать, что для данной локальной координатной системы $\varphi : U \to V,\ V \subset \mathbf{R}^k$ отображение $\varphi\Phi^{-1} : M_2 \to M_1$ можно принять за локальную систему в M_2, причем снова базисные векторы $\boldsymbol{e}_i$ в каждой точке x_0 переходят взаимнооднозначно в базисные векторы $\boldsymbol{m}_i = d\Phi(e_i)$ в точке $\Phi(x_0)$.

Теперь докажем лемму

Лемма 4.9. *Дифференциал $d\Phi$ сохраняет длины векторов.*

□ Проведем в области U кривую с касательным вектором $\boldsymbol{v}$, ее образ в $\widetilde{U}$ имеет касательный вектор $\tilde{\boldsymbol{v}}$. Допустим, что в некоторой точке $|\boldsymbol{v}| \neq |\tilde{\boldsymbol{v}}|$ (для определённости $|\boldsymbol{v}| < |\tilde{\boldsymbol{v}}|$). Тогда неравенство верно и в некоторой окрестности этой точки. Значит, $\int |v|dt < \int |\tilde{v}|dt$, т. е. длина дуги кривой не сохранилась. Противоречие. ■

Из леммы следует, что сохраняются все скалярные квадраты. Но скалярное произведение двух произвольных векторов можно выразить через скалярные квадраты по формуле $(a, b) = \frac{1}{2}\big((a+b, a+b) - (a, a) - (b, b)\big)$, а значит f сохраняет и скалярное произведение любых векторов. В частности, $g_{ij} = (e_i, e_j) = (m_i, m_j) = \tilde{g}_{ij}$. Теорема доказана. ■

Следствие 4.10. *Изометрия влечет полное совпадение геометрий (углы, длины, объемы и т. д. одинаковы), поскольку все эти величины полностью описываются через метрические тензоры.*

Рассмотрим несколько примеров эквивалентных метрик.

Пример. Метрика $ds^2 = du^2 + u^2dv^2$ на плоскости переменных u, v эквивалентна евклидовой метрике в полярных координатах $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$. Геометрия на этой плоскости эквивалентна евклидовой геометрии на плоскости Oxy.

Пример. Рассмотрим цилиндрические координаты, они задают метрику $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. На цилиндрической поверхности $\rho = const$ метрика имеет вид $ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2$. При замене координат $x = a\varphi$, $y = z$, получим $dx = a\,d\varphi$, $dy = dz$, и метрика принимает вид $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Таким образом, внутренняя геометрия на цилиндре локально евклидова.

Пример. Пусть дана область $U \subset \mathbb{R}n$ с римановой метрикой $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$. Пусть $\widetilde{U}$ – карта области U (с аффинными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$. Записи метрик в U и $\widetilde{U}$ совпадут, следовательно, области изометричны.

Вообще, метрика эквивалентна евклидовой, если в некоторой системе координат $G = E$. Но как узнать, существует или нет такая система координат для данной римановой метрики? Мы решим эту задачу в настоящем курсе для $n = 2$, см. п. 7.18 (общий случай – в последующем курсе по дифференциальной геометрии и топологии).

Заметим, что на кривой любая метрика эквивалентна евклидовой, так как $ds^2 = |v|^2 dt^2$ и всегда можно перейти к натуральному параметру, при котором $|v| = 1$ и $g_{11} = 1$, $G = E$, т.е. в одномерном случае нет внутренней геометрии, есть только внешняя – геометрия расположения в $\mathbb{R}^n$. Нетрудно убедиться, что (внутренняя) геометрия на любой цилиндрической и на любой конической поверхности локально изометрична евклидовой.

5. Псевдоевклидовы пространства

Как отмечалось выше, положительно определённая метрика (первая квадратичная форма) на k-поверхностях в n-мерных пространствах $\mathbb{R}^n$ может определяться не только обычным скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$, но и псевдоевклидовыми скалярными произведениями. Прежде чем рассмотреть примеры, сделаем сначала краткий экскурс в алгебраическую теорию.

5.1. Основные понятия. Базисы и подпространства

Определение. Пространство V над $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если на нем задано скалярное произведение $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, т.е. симметричная положительно определённая билинейная функция:

1°. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;

2°. $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$;

3°. $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;

4°. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$, если $\boldsymbol{a} \neq 0$.

Базис называется *ортонормированным*, если в нём матрица Грама единичная. Что получится, если в определении $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ отбросить требование **4°**? Известно, что любую симметричную билинейную функцию можно привести к *нормальному виду* :

$$\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix}\right\} p & & \\ & \left.\begin{matrix} -1 & \\ & -1 \end{matrix}\right\} q & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определение. Число $p+q$ называется *рангом* билинейной функции, а $p-q$ – *сигнатурой.* Число p называется *положительным индексом инерции*, а q – *отрицательным индексом.*

Определение. Базис пространства называется *ортонормированным* по отношению к билинейой форме $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, если в нем матрица Грама имеет нормальный вид.

Через V в этом пункте будем обозначать пространство со скалярным произведением, не обязательно удовлетворяющим требованию **4°**.

Определение. Пространство V со скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ называется *изотропным,* если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{a} \in V$, алгебраически ортогональный к V, т.е. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0\,\forall \boldsymbol{x} \in V$, что мы будем привычно обозначать $\boldsymbol{a} \perp V$.

Теорема 5.1. *Пространство V изотропно $\Leftrightarrow$ скалярное произведение на нём вырождено.*

☐ Пусть скалярное произведение вырождено, тогда в нормальном виде будут нули на диагонали, и достаточно взять базисный вектор $\boldsymbol{e}_n$, тогда $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x}) = 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$, т. е. пространство изотропно. Если же оно невырождено, то в базисе, соответствующем нормальному виду, для любого вектора $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ имеем: $\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall i\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = 0$, т. е. $\pm a^i = 0$, все координаты нулевые. ■

Геометрия изотропных пространств далека от евклидовой. Заметим, однако, что требование **4°** обеспечивает невырожденность классического скалярного произведения. В связи с этим принимаем

Определение. Пространство V над $\mathbb{R}$ называется *псевдоевклидовым,* если билинейная функция $(\boldsymbol{a}, b)$ (скалярное произведение) невырождена.

Псевдоевклидово пространство обозначается $\mathbb{R}^n_q$.

Определение. *Ортогональное дополнение* к подпространству $W \subset V$ это подпространство

$$W^\perp := \{\boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} \perp W\} = \{\boldsymbol{a} : (\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in W\}. \tag{2}$$

Далее считаем, что пространство V псевдоевклидово.

Теорема 5.2. *Пусть дано псевдоевклидово пространство V и его подпространство $W \subset V$. Тогда* $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

$\square$ Пусть $V = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, и этот базис ортонормированный. Возьмем вектор $\boldsymbol{x} = (x^1, \dots, x^n)$. Пусть $\boldsymbol{a}_i$ образуют базис в $W = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$, и пусть $\boldsymbol{a}_i = (a^1_i, \dots, a^n_i)$ в базисе V . Т.к. $\boldsymbol{x} \perp W \Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i) = 0$, мы получим систему

$$a^1_i x^1 + \ldots + a^p_i x^p - a^{p+1}_i x^{p+1} - \ldots - a^n_i x^n = 0, \quad i = 1, \dots, k. \tag{3}$$

Векторы $\boldsymbol{a}_i$ линейно независимы, следовательно, ранг её равен k, и размерность пространства решений равна $n - k$, т.е. $\dim W^\perp = n - k$. ■

Следствие 5.3. $(W^\perp)^\perp = W$.

$\square$ Очевидно, что $W \subset (W^\perp)^\perp$. Но из теоремы следует, что $\dim(W^\perp)^\perp = n - (n - k) = k = \dim W$, т.е. строгого вложения быть не может. ■

Теорема 5.4. Подпространство W изотропно тогда и только тогда, когда $W \cap W^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$.

$\square$ Если $\boldsymbol{a} \neq 0$ и $\boldsymbol{a} \in W \cap W^\perp$, то $\boldsymbol{a} \perp W$ и W изотропно. Если W изотропно, то существует $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, такой что $\boldsymbol{a} \in W$ и $\boldsymbol{a} \perp W$, т.е. $\boldsymbol{a} \in W^\perp$ и $W \cap W^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$.

Следствие 5.5. *W изотропно тогда и только тогда, когда $W^\perp$ тоже изотропно. $V = W \oplus W^\perp$ тогда и только тогда, когда W не является изотропным (эквивалентно — $W^\perp$ не изотропно).*

Все изотропные векторы, т. е. такие что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$, образуют изотропный конус, задаваемый уравнением

$$\left(x^1\right)^2 + \ldots + \left(x^p\right)^2 - \left(x^{p+1}\right)^2 - \ldots - \left(x^n\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Теорема 5.6. *В псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_q$, $q > 0$, существуют изотропные подпространства любой размерности от 1 до $n - 1$.*

$\square$ Утверждение верно для $\mathbb{R}^2$. Имеется разложение $\mathbb{R}^n_q = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-1}_q$, где $\mathbb{R}$ не изотропно. Тогда, в силу следствия 5.5, $\mathbb{R}^{n-1}_q$ также не изотропно. Поэтому (по индуктивному предположению) в $\mathbb{R}^n_q$ найдутся изотропные подпространства всех размерностей $\leq n - 2$. Изотропные подпространства размерности $n - 1$. в силу теоремы 5.2 и следствия 5.5, – это ортогональные дополнения к изотропным векторам. ■

Теорема 5.7. *Любой неизотропный вектор можно включить в ортонормированный базис, умножив на подходящий коэффициент λ.*

$\square$ Проведём индукцию по размерности пространства $n = \dim V$. При $n = 1$ базис состоит из одного вектора λa, где λ – такое число, что $(\lambda \boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{a}) = \pm 1$. Шаг индукции: пусть теорема доказана для размерности $\dim V < n$. Возьмем в данном V одномерное неизотропное подпространство $W := (\boldsymbol{a})$, тогда $W^\perp$ будет $(n-1)$-мерным неизотропным подпространством, а в нём по предположению индукции существует ортонормированный базис. Остаётся к нему добавить $\lambda\boldsymbol{a}$ (пользуемся следствием 5.5).

■

5.2. Псевдоортогональные матрицы и операторы

Определение. Через E_q будем обозначать диагональную матрицу порядка $n \times n$, с p единицами и q минус единицами на диагонали, $p+q=n$. Такие матрицы будем называть *псевдоединичными.* Матрица называется *псевдоортогональной*, если она есть матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Теорема 5.8. *Следующие условия эквивалентны:*
1. C *– псевдоортогональная матрица;*
2. $C^t E_q C = E_q$ для некоторого q;
3. $C^{-1} = E_q C^t E_q$;
4. C^t *также псевдоортогональна.*

□ $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ $G' = C^t G C$, поэтому условие 2 означает, что C – матрица перехода между ортонормированными базисами ($G' = G = E_q$), т.е. C псевдоортогональна. Наоборот, если C псевдоортогональна, она переводит ортонормированные базисы в ортонормированные, и тогда $G' = E_q = C^t E_q C$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ $C^t E_q C C^{-1} = E_q C^{-1} \Rightarrow C^t E_q = E_q C^{-1} \Rightarrow E_q C^t E_q = C^{-1}$, так как $E_q E_q = E$.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ $C^{-1} E_q = E_q C^t \Rightarrow C C^{-1} E_q = C E_q C^t \Rightarrow E_q = C E_q C^t = (C^t)^t E_q C^t$, следовательно, по условию 2, матрица C^t также будет псевдоортогональной.

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Псевдоортогональность C^t влечет псевдоортогональность $(C^t)^t = C$. ■

Следствие 5.9.
1. *Псевдоортогональность матрицы по столбцам эквивалентна её псевдоортогональности по строкам.*
2. *Для псевдоортогональных матриц* $\det C = \pm 1$.

Определение. Оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n_q \to \mathbb{R}^n_q$ называется *псевдоортогональным*, если $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \mathcal{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Очевидно, что оператор псевдоортогонален $\Leftrightarrow$ его матрица в ортонормированном базисе псевдоортогональна $\Leftrightarrow$ он переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

5.3. Геометрия плоскости $\mathbb{R}^2_1$

Определение. *Псевдодлиной неизотропного вектора* называется величина $|\boldsymbol{a}| := \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$. *Псевдодлиной правильно параметризованной кривой*, т. е. такой, что вектор скорости $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ и $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 0$, называется величина $s(t) = \int\limits_0^t |\boldsymbol{v}| dt$.

Псевдодлина кривой не зависит от параметризации по тем же причинам, что и обычная длина. Она сохраняется при псевдоортогональном преобразовании, так как оно сохраняет скалярное произведение.

Теперь рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2_1$.

В нём скалярное произведение задаётся в хорошем базисе формулой $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = xx' - yy'$, и два вектора $\boldsymbol{a} = (x, y)$, $\boldsymbol{b} = (x', y')$ будут ортогональными, если они симметричны относительно прямой $y = x$ или $y = -x$. Концы всех единичных векторов лежат на гиперболе $x^2 - y^2 = 1$, концы мнимоединичных – на $x^2 - y^2 = -1$.

Стандартный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ при псевдоортогональном отображении может перейти, например, в ортонормированный базис $\boldsymbol{e}'_l = (X, Y), \boldsymbol{e}'_2 = (Y, X)$. Следовательно, матрица перехода может иметь один из следующих видов:

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -X & -Y \\ -Y & -X \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Параметризуем единичную псевдоокружность, заданную уравнением $x^2 - y^2 = 1$. Выражая x через $y = t$, получим $\boldsymbol{r}(t) = (\pm\sqrt{1+t^2},\, t)$.

Найдём вектор скорости (помня, что метрическая квадратичная форма имеет здесь вид $dx^2 - dy^2$):

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \left(\pm\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\, 1\right), \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \frac{-1}{1+t^2}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{1+t^2}} \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{i}$ вектор, служащий ортом оси Oz, и его псевдодлина есть $\sqrt{-1} = i$.

Пусть σ — псевдодлина псевдоокружности. Тогда

$$\sigma(t) = i\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = i\ln(t + \sqrt{1+t^2}). \tag{7}$$

В данном случае длина получилась чисто мнимая. Это не очень удобно, поэтому имеет смысл вынести i и считать псевдодлиной овеществление полученного выражения. Вспоминая, что в нашей параметризации $y = t$, окончательно получаем

$$\sigma(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}). \tag{8}$$

Выражая y через σ, получаем параметризацию псевдоокружности через её длину:

$$y = \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{2} = \operatorname{sh}\sigma, \qquad x = \operatorname{ch}\sigma. \tag{9}$$

Таким образом, если псевдодлину использовать в качестве параметра, то все псевдоортогональные матрицы имеют один из четырех видов:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ -\operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & -\operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & -\operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\sigma & -\operatorname{sh}\sigma \\ -\operatorname{sh}\sigma & -\operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix} \tag{10}$$

Определение. *Псевдовращением* называется преобразование с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Вектор $\boldsymbol{a}$ называется *единичным*, если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1$, и *мнимоединичным*, если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = -1$. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ оба единичные, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{ch}\theta$, где θ — длина дуги псевдоокружности между концами векторов. Если векторы мнимоединичные, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\operatorname{ch}\theta$.

В самом деле, примем за $\boldsymbol{e}_1$ вектор $\boldsymbol{a}$, тогда $\boldsymbol{a} = (1, 0)$ и $\boldsymbol{b} = (\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta)$.

Следовательно, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{ch}\theta$. Второй случай доказывается аналогично: ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$, $b = (\operatorname{sh}\theta, \operatorname{ch}\theta)$).

На $\mathbb{R}^2_1$ возникает гиперболическая тригонометрия. Вычислим $\operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2)$. Пусть $\boldsymbol{a} = (\operatorname{ch}\theta_1, \operatorname{sh}\theta_1)$ и $\boldsymbol{b} = (\operatorname{ch}\theta_2, -\operatorname{sh}\theta_2)$. Это единичные векторы, расположенные в правых четвертях координатной плоскости, поэтому

$$\operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2) = (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) = \operatorname{ch}\theta_1 \operatorname{ch}\theta_2 + \operatorname{sh}\theta_1 \operatorname{sh}\theta_2. \tag{12}$$

Формулы для косинуса и синуса суммы могут быть получены и как следствие того, что матрица вида (11) для $\sigma = \sigma_1+\sigma_2$ равна произведению аналогичных матриц для σ_1 и σ_2.

Пусть $\beta := \operatorname{th}\sigma = \frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\sigma}$, тогда

$$1-\beta^2 = 1-\frac{\operatorname{sh}^2\sigma}{\operatorname{ch}^2\sigma} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\sigma} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ch}\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \operatorname{sh}\sigma = \operatorname{th}\sigma\operatorname{ch}\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (13)$$

Если использовать β в качестве параметра, то псевдоортогональные матрицы примут вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

5.4. Преобразования в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_q$

Зафиксируем в пространстве V некоторый базис, тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями $f : V \to V$ и их матрицами C_f . Все преобразования пространства, т.е. изоморфизмы, очевидно, образуют группу.

Рассмотрим группы ортогональных и псевдоортогональных преобразований $O(n)$ и $O(n, q)$, соответственно.

Теорема 5.10. *Группа $O(n)$ состоит из двух компонент: собственных и несобственных преобразований.*

☐ В группе $O(n)$ есть по меньшей мере 2 компоненты: матрицы с определителями $\det C = 1$ и $\det C = -1$ принадлежат разным компонентам, поскольку матрицу с положительным определителем нельзя непрерывно перевести в матрицу с отрицательным определителем, сохранив невырожденность матрицы. Докажем, что компонент ровно 2.

Пусть $A \in O(n)$ – какое-то преобразование. Существует базис $\boldsymbol{e}'_l, \ldots, \boldsymbol{e}'_l$, в котором его матрица A имеет вид:

$$C - \begin{pmatrix} E & & & & \\ & R(\varphi_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R(\varphi_m) & \\ & & & & -E \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где первые k векторов отображаются тождественно (подматрица E), последние l векторов умножаются на -1 (подматрица $-E$), а $R(\varphi_i)$ представляют собой двумерные повороты на некоторые углы $\varphi_i \neq \pi$, $0 < \varphi_i < 2\pi$. Непрерывно устремляя углы φ_i к 0 или 2π, можно добиться того, что все блоки $R(\varphi_i)$ будут единичными. Сгруппировав минус единицы в пары, заметим, что матрица $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ есть матрица поворота в соответствующей двумерной плоскости на угол π. Значит, такие блоки также можно перевести в единичные, после чего матрица превратится либо в единичную, либо в матрицу с одной -1 на последнем месте.

Базис $\boldsymbol{e}'_l, \dots, \boldsymbol{e}'_l$ без ограничения общности можно считать положительно ориентированнным. По доказанному его можно как жесткое целое непрерывным процессом перевести в стандартный $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$. Тогда оператор умножения на -1 по оси $\boldsymbol{e}'_n$ перейдёт в такой же оператор по отношению к $\boldsymbol{e}_n$, и оператор A перейдёт в оператор с матрицей E_1 относительно основного базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$. ■

Теперь рассмотрим группу $O(3,1)$. Скалярное произведение в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^3_1$ задаётся формулой $(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = xx' + yy' - zz'$. Изотропные векторы лежат на конусе $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Поверхность $x^2+y^2-z^2 = 1$ называют единичной *псевдосферой*, а $x^2+y^2-z^2 = -1$ – *мнимоединичной псевдосферой*.

Посмотрим, где лежат векторы ортонормированного базиса $(\boldsymbol{e}'_l, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$. Вектор $\boldsymbol{e}'_3$ лежит на двуполостном гиперболоиде, а $\boldsymbol{e}'_l$ и $\boldsymbol{e}'_2$ – на однополостном. Пусть $\boldsymbol{e}'_3 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, тогда $\boldsymbol{e}'_l$ и $\boldsymbol{e}'_2$ лежат в ортогональном дополнении, т. е. имеют такие координаты (x, y, z), что $\alpha x + \beta y - \gamma z = 0$. Эта плоскость является сопряженной плоскостью к $\boldsymbol{e}_3$. Сечение однополостного гиперболоида плоскостью, на которой лежат концы векторов $\boldsymbol{e}'_l$ и $\boldsymbol{e}'_2$, является эллипсом. Таким образом, ортонормированные базисы — это в точности тройки взаимносопряженных векторов (поскольку ортогональное дополнение к любому из них – это сопряжённая плоскость в терминологии аналитической геометрии).

Заметим, что эти наблюдения не являются чем-то исключительным только для $\mathbb{R}^3_1$ — в обычной геометрии $\mathbb{R}^3$ ортогональность есть сопряженность по отношению к обычной сфере.

Теорема 5.11. *Группа* $O(3,1)$ *состоит из 4 компонент.*

□ По аналогии с предыдущей теоремой легко видеть, что имеется как минимум 4 непересекающихся открытых множества: ориентация $(\boldsymbol{e}'_l, \boldsymbol{e}'_2)$ может сохраняться или не сохраняться, и вектор $\boldsymbol{e}'_3$ может оказаться либо на верхней полости гиперболоида, либо на нижней. Очевидно, что непрерывно из одного подмножества в другое перейти нельзя.

Остаётся показать связность каждого. Рассмотрим случай того из этих четырех подмножеств $SO(3,1)$, которое содержит единичную матрицу.

Рассмотрим в $SO(3,1)$ какой-нибудь ортонормированный базис $(\boldsymbol{e}'_l, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$. Как уже говорилось, векторы $\boldsymbol{e}'_l$ и $\boldsymbol{e}'_2$ лежат на эллипсе. Непрерывно переместим по этому эллипсу $\boldsymbol{e}'_1$ в вектор $\boldsymbol{e}''_1$ большей полуоси эллипса, при этом $\boldsymbol{e}'_2$, будучи сопряжённым к $\boldsymbol{e}'_l$, переместится в вектор $\boldsymbol{e}''_2$ меньшей полуоси, и сохраняется сопряженность, т.е. псевдоортогональность, этих векторов с вектором $\boldsymbol{e}'_3$.

Далее вращаем пространство вокруг оси Oz так, чтобы $\boldsymbol{e}'_3$ переместился в первый квадрант плоскости Oxz (такое вращение псевдоортогонально, поскольку образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ остаются ортонормированными в пространстве $\mathbb{R}^3_1$). При этом $\boldsymbol{e}''_2$ переместится в $\boldsymbol{e}_2$.

Наконец, двигая по двуполостному гиперболоиду $\boldsymbol{e}''_3$ до $\boldsymbol{e}_3$, получим в силу сопряжённости в плоскости Oxz перемещение $\boldsymbol{e}'''_1$ (возникшего из $\boldsymbol{e}''_1$) в вектор $\boldsymbol{e}_1$. Тем самым базис $\boldsymbol{e}'_l, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ перешел в $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

В остальных трёх случаях аналогичным образом $\boldsymbol{e}'_l, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ можно соеденить с одним из базисов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_3$ или $\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ или $\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_3$. ■

Заметим, что $O(2,1)$ тоже состоит из 4-х компонент, каждая из которых эквивалентна $\mathbb{R}^1$ (т.к. $-\infty < \sigma < \infty$).

6. Планиметрии Евклида, Лобачевского и Римана

6.1. Геометрия на сфере и псевдосфере

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, и нижнюю полость $\mathbb{L}^2$ двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, т. е. мнимой псевдосферы в пространстве $\mathbb{R}^3_1$. Сферическую геометрию называют *римановой геометрией*, а геометрию на псевдосфере – *геометрией Лобачевского.*

Теорема 6.1. *На поверхности $\mathbb{L}^2$ из $\mathbb{R}^3_1$ индуцируется (риманова) положительно определённая метрика.*

☐ Возьмем произвольную точку $A \in \mathbb{L}^2$ и рассмотрим вектор $\boldsymbol{e}'_3 := \overrightarrow{OA} = (x_0, y_0, z_0)$. Касательная плоскость к $\mathbb{L}^2$ в этой точке имеет уравнение $(x-x_0)x_0+(y-y_0)y_0-(z-z_0)z_0 = 0$ и является ортогональным дополнением к $\boldsymbol{e}'_3$. В этой плоскости $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$, так как это ортогональное дополнение к мнимоединичному вектору. ■

Определение. *Прямыми на сфере* будем называть центральные сечения сферы плоскостями. *Прямыми на плоскости Лобачевского* будем называть сечения $\mathbb{L}^2$ плоскостями, проходящими через начало координат.

Заметим, что на плоскости, проходящей через начало, индуцируется псевдоскалярное произведение, и мы можем применять результаты пункта 5.3.

За расстояние $\rho(A,\, B)$ между точками A, B примем длину дуги прямой (т.е. центрального сечения) между этими точками.

Только прямые на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ являются локально кратчайшими (п.п. 8.2, 8.3 и 8.7).

Теперь оправдаем данное определение. Как мы сейчас увидим, для таких прямых выполняется неравенство треугольника.

Теорема 6.2. *Для любых трёх точек A_1, A_2, A_3 на $\mathbb{L}^2$ или на $\mathbb{S}^2$, расстояния между которыми равны $l_1 = \rho(A_2,\, A_3)$, $l_2 = \rho(A_1,\, A_3)$, $l_3 = \rho(A_1,\, A_2)$, выполняется неравенство $l_1 + l_2 \ge l_3$, причём равенство достигается только тогда, когда точки лежат на одной прямой.*

☐ **1°** *Геометрия Лобачевского.* Пусть $\boldsymbol{e}'_i = \overrightarrow{OA_i}$. Достаточно доказать, что $\operatorname{ch}(l_1 + l_2) \ge \operatorname{ch}(l_3)$, так как $\operatorname{ch} x$ монотонно возрастает при $x \ge 0$. Следует показать, что

$$\operatorname{ch}(l_1 + l_2) = \operatorname{ch} l_1 \operatorname{ch} l_2 + \operatorname{sh} l_1 \operatorname{sh} l_2 = \operatorname{ch} l_1 \operatorname{ch} l_2 + \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_1 - 1}\sqrt{\operatorname{ch}^2 l_2 - 1} \ge \operatorname{ch} l_3. \qquad (1)$$

Рассмотрим матрицу Грама $G = (g_{ij})$ для векторов $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$. Имеем $\operatorname{ch} l_3 = \operatorname{ch}\big(\angle(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\big) = g_{12} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, и аналогично $\operatorname{ch} l_1 = -g_{23}$, $\operatorname{ch}_{l_2} = -g_{13}$. Перепишем неравенство (1) через коэффициенты матрицы G и получим:

$$\sqrt{g_{23}^2 - 1}\sqrt{g_{13}^2 - 1} \ge -g_{12} - g_{23}g_{13} \quad \Leftrightarrow \quad g_{12}^2 + g_{23}^2 + g_{23}^2 + 2g_{12}g_{13}g_{23} - 1 \le 0. \qquad (2)$$

Заметим, что в ортонормированном базисе $\det G = \det(E_1) < 0$. При переходе к базису $\boldsymbol{e}'_i$ знак определителя сохранится, т. е.

$$\det G = \begin{vmatrix} -1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & -1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & -1 \end{vmatrix} < 0, \quad (\text{вспомним, что } E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ G = C^t E_1 C). \quad (3)$$

В левой части неравенства (2) получилось в точности явное выражение для $\det G$, а мы показали, что $\det G < 0$. Равенство может достигаться в точности тогда, когда векторы $\boldsymbol{e}'_i$ лежат в одной плоскости, – т. е. на одной прямой Лобачевского, – поскольку тогда и только тогда определитель Грама обращается в нуль.

2° *Сферическая геометрия.* Доказательство почти аналогично первому пункту. На сфере отрезком считается та из двух дуг центрального сечения, длина которой меньше π. Поэтому в том случае, когда сумма длин двух сторон больше π, неравенство очевидно. В противном же случае достаточно показать, что $\cos(l_1+l_2) \leq \cos(l_3)$, так как $\cos x$ монотонно убывает при $x \in [0,\pi]$. Следует показать, что

$$\cos l_1 \cos l_2 - \sqrt{1-\cos^2 l_1}\sqrt{1-\cos^2 l_2} \leq \cos l_3 \tag{4}$$

В обозначениях пункта **1°** , приходим к требуемому неравенству:

$$g_{23}g_{13} - g_{21}^2 \leq \sqrt{(1-g_{23})(1-g_{13})} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{32}^2 + 2g_{12}g_{23}g_{32} \geq 0. \tag{5}$$

Если векторы e'_i ортонормированы, то их матрица Грама единичная, и $\det G = 1 > 0$. Знак $\det G$ инвариантен, следовательно

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & 1 & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & 1 \end{vmatrix} > 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что и выражение (5), которое совпадает с $\det G$, также всегда положительно (за исключением того случая, когда e_i компланарны). ■

6.2. Группы движений $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$

Под *движениями* онимаются изометричные преобразования. Как мы знаем, на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ существует и единственно преобразование, переводящее один ортонормированный репер в такой же другой. Как мы сейчас увидим, сфера и плоскость Лобачевского в этом отношении ничуть не хуже.

Условимся понимать под ортонормированным репером на $\mathbb{S}^2$ или $\mathbb{L}^2$ любую точку с двумя касательными ортогональными друг другу единичными векторами e'_1 и e'_2, а саму точку – как конец вектора e'_3.

Слово «преобразование» будет здесь означать «движение».

Теорема 6.3. *Преобразование $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$, переводящее ортонормированный репер в ортонормированный, существует и единственно. Группой движений $\mathbb{S}^2$ является $\boldsymbol{O}(3)$, а группой движений $\mathbb{L}^2$ – часть группы $\boldsymbol{O}(3,1)$, сохраняющая нижнюю полость гиперболоида.*

□ Существование следует из того, что существует соответствующее ортогональное преобразование $\mathbb{R}^3$ в случае $\mathbb{S}^2$ и псевдоортогональное – в случае $\mathbb{L}^2$ в $\mathbb{R}^3_1$, переводящее один трёхмерный репер в другой. Докажем единственность.

Пусть f и $\tilde{f}$ – преобразования $\mathbb{L}^2$(например), переводящие репер (P, e_1, e_2) в репер (P', e'_1, e'_2). Рассмотрим произвольную точку $A \in \mathbb{L}^2$ и её образы $f(A)$ и $\tilde{f}(A)$. Покажем, что они совпадают.

? Проведём прямую (центральное сечение) AP. При изометрическом преобразовании сохраняются длины дуг, следовательно, прямая, как локально кратчайшая, перейдёт в прямую. Значит, образами отрезка центрального сечения AP при преобразованиях f и $\tilde{f}$ будут также некоторые отрезки центральных сечений. Но при изометрии сохраняются и углы, а это значит, что углы между векторами e'_i и отрезками $f(AP)$ и $\tilde{f}(AP)$ будут совпадать. Значит, направление образа дуги AP определено однозначно. Следовательно, и образ точки A определён однозначно, что и требовалось доказать. Доказательство для $\mathbb{S}^2$ такое же. ■

Как и в случае $\mathbb{R}^2$, группы преобразований $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ трёхмерны, так как каждое преобразование можно представить матрицей 3×3, условие же ортогональности (или псевдоортогональности) даёт 6 соотношений на 9 членов матрицы, следовательно, остается 3 независимых параметра (в $\mathbb{R}^2$ это координаты начала образа репера и угол наклона).

Следствие 6.4. *Сфера $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ однородны: их локальное строение одинаково во всех точках (это не так для эллипсоидов, параболоидов, гиперболоидов (в обычной метрике)).*

(*?*) **Замечание.** Имеет место следующие очевидные строгие включения: {ортогональные преобразования} $\subset$ {аффинные преобразования} $\subset$ {проективные преобразования}. В проективной группе содержится аффинная группа и вместе с ней (через модель пополненной проективной плоскости) группы движений $\mathbb{R}^2$ и плоскости Лобачевского, а также $\mathbf{SO}(3) \subset \mathbf{O}(3)$.

6.3. Модель Клейна плоскости Лобачевского

Рассмотрим плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ и обычную евклидову плоскость α, заданную уравнением $z = -1$. Рассмотрим центральную проекцию конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (с исключенной вершиной) и $\mathbb{L}^2$ на плоскость α. Образ конуса при этом преобразовании (т. е. окружность на плоскости α) называется *абсолютом.* Вся плоскость Лобачевского, очевидно, при нашем преобразовании биективно отобразится на внутренность круга, границей которого является абсолют. Прямые на плоскости Лобачевского, т. е. центральные сечения гиперболоида, перейдут в хорды абсолюта. Вся эта конструкция и называется *моделью Клейна геометрии Лобачевского.* Заметим, что в этой модели хорошо видно, что через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести сколь угодно много прямых, не пересекающих данную, т.е. “параллельных” данной. Тем самым нарушается так называемый пятый постулат Евклида (аксиома параллельных). В этом и состоит отличие геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии. Теперь вспомним, что проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ – это связка прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат, которую можно рассматривать как пополненную плоскость $\mathbb{R}^2$.

Теорема 6.5. *Группа движений $\mathbb{L}^2$ совпадает с группой проективных преобразований связки (пополненной плоскости $z = -1$), которые сохраняют абсолют.*

□ Каждое движение $\mathbb{L}^2$ как псевдоортогональное преобразование $\mathbb{R}^3_1$ переводит в себя изотропный конус, следовательно, является проективным преобразованием $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, сохраняющим абсолют. Докажем обратное.

Рассмотрим проективное преобразование f, сохраняющее абсолют. Пусть оно задаётся матрицей C (определённой с точностью до пропорциональности). Основная идея доказательства в том, чтобы подправить пропорционально матрицу C так, чтобы она стала псевдоортогональной. Будем трактовать преобразование как замену координат (x', y', z') на (x, y, z). Тогда матрица $Q = E_1 = diag(1, 1, -1)$ квадратичной формы уравнения конуса $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0$ преобразуется по формуле C^tQC и переходит в матрицу λQ, так как точки (x, y, z) принадлежат тому же конусу, а два его уравнения пропорцианальны. Поскольку знак детерминанта Q – инвариант, то $\lambda > 0$. Теперь рассмотрим матрицу $\widetilde{C} := \frac{1}{\sqrt{\lambda}}C$. Имеем $Q = E_1$ и

$$E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right)^t E_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right) = \widetilde{C}^t E_1 \widetilde{C}, \tag{7}$$

что означает псевдоортогональность матрицы $\widetilde{C}$ (см. п. 5.2). Таким образом, установлена биекция между соответствующими группами преобразований.

Замечание. Определяющая $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ связка прямых (каждая из которых пересекает $\mathbb{S}^2$ в диаметрально противоположных точках) подсказывает ещё одну модель $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$: это $\mathbb{S}^2$ после отождествления диаметрально противоположных точек (точки $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ – пары противоположных точек $\mathbb{S}^2$). Под планиметрией Римана понимают геометрию $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ в этой модели (с метрикой, локально изометричной $\mathbb{S}^2$). Заметим, что на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (в отличие от $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{L}^2$) нет параллельных прямых. Группа движений $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ есть $\mathbf{SO}(3)$ – подгруппа собственных движений $\mathbb{S}^2$. (Центральная симметрия $\mathbb{R}^3$ дает тождественное отображение $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.)

6.4. Метрики на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ в полярных координатах

Рассмотрим $\mathbb{S}^2$ в сферических координатах, отмеряя угол θ от оси z. Имеем $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2$. Пусть $\rho = a$ – радиус сферы, тогда получаем $ds^2 = a^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + a^2 d\theta^2$. Пусть P — северный полюс сферы, A – произвольная точка на сфере, а l – длина дуги PA. Имеем

$$l = a\theta, \quad ds^2 = dl^2 + a^2 \sin^2\left(\frac{l}{a}\right) d\varphi^2. \tag{8}$$

Если $l \to 0$, то $\sin\frac{l}{a} \sim \frac{l}{a}$ и $ds^2 \approx dl^2 + l^2 d\varphi^2$, т. е. метрика близка метрике в полярных координатах на плоскости. Пусть теперь $\rho = a = 1$, тогда $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Найдём длину s окружности на сфере с фиксированным углом $\theta = r$. Имеем

$$ds^2 = \sin^2 r\, d\varphi^2 \Rightarrow ds = \sin r\, d\varphi \Rightarrow s = \int_0^{2\pi} \sin r\, d\varphi = 2\pi \sin r. \tag{9}$$

Площадь, ограниченная этой окружностью равна

$$S = \iint \sqrt{|G|}\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sin\theta\, d\theta = 2\pi(1 - \cos r). \tag{10}$$

Заметим, что если $r \to 0$, то $\cos r \sim 1 - \frac{r^2}{2}$ и $S \sim \pi r^2$, $\sin r \sim r$, $s \sim 2\pi r$.

Теперь выведем метрику на $\mathbb{L}^2$. Пусть P — верхняя точка нижней полости гиперболоида, $A \in \mathbb{L}^2$, и θ – длина дуги PA. Параметризуем плоскость Лобачевского: $\boldsymbol{r} = (\operatorname{sh}\theta \cos\varphi,\ \operatorname{sh}\theta \sin\varphi,\ -\operatorname{ch}\theta)$. Тогда

$$\boldsymbol{m}_1 = \frac{\partial r}{\partial \theta} = (\operatorname{ch}\theta \cos\varphi, \operatorname{ch}\theta \sin\varphi, -\operatorname{sh}\theta), \quad \boldsymbol{m}_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\operatorname{sh}\theta \sin\varphi, \operatorname{sh}\theta \cos\varphi, 0). \tag{11}$$

Отсюда $g_{11} = (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_1) = 1$, $g_{12} = (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2) = 0$, $g_{22} = (\boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_2) = \operatorname{sh}^2\theta$, и метрика имеет вид $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, d\phi^2$. Аналогично случаю $\mathbb{S}^2$ получаем, что длина окружности радиуса $\theta = R$ равна $s = 2\pi \operatorname{sh} R$, а площадь круга того же радиуса равна

$$\iint \sqrt{|G|}\, d\varphi\, d\theta = \operatorname{sh}\theta\, d\varphi\, d\theta = 2\pi(\operatorname{ch} R - 1). \tag{12}$$

И здесь при малых R имеем $s \sim 2\pi R$, $S \sim \pi R^2$.

6.5. Метрики $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ в координатах стереографической проекции

Возьмём точку $A(x, y, z)$ на сфере $x^2+y^2+z^2 = 1$ или на плоскости Лобачевского $x^2+y^2-z^2 = -1$ $(z < 0)$ и соединим её прямой с точкой $P(0,\,0,\,1)$. Если $A \neq P$, то эта прямая пересечёт плоскость xOy в некоторой точке $A'(x', y', 0)$. Очевидно, что такие отображения множеств $\mathbb{S}^2 \setminus P$ и $\mathbb{L}^2$ на плоскость будут биективными. Пусть точка A' на плоскости имеет полярные координаты (ρ, φ), и d — расстояние от точки A до оси Oz. Имеем

$$\frac{\rho}{d} = \frac{1}{1-z} \quad \Rightarrow \quad d = \rho(1-z). \tag{13}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Для } \mathbb{S}^2: & \text{Для } \mathbb{L}^2: \\
\rho^2(1-z)^2 = d^2 = 1 - z^2 & \rho^2(1-z)^2 = z^2 - 1 \\
\rho^2(1-z) = 1 + z & \rho^2(1-z) = -(1+z) \\
z = \frac{\rho^2-1}{\rho^2+1} & z = \frac{\rho^2+1}{\rho^2-1} \\
\text{в силу (13), } d = \frac{2\rho}{1-\rho^2} & d = \frac{2\rho}{1+\rho^2}
\end{array}$$

Отсюда получаем выражение координат точки на поверхности через полярные координаты проекции:

$$r_{\mathbb{S}}(\rho, \varphi) = \left(\frac{2\rho\cos\phi}{1+\rho^2}, \frac{2\rho\sin\phi}{1+\rho^2}, \frac{\rho^2-1}{\rho^2+1}\right);\ r_{\mathbb{L}}(\rho, \varphi) = \left(\frac{2\rho}{1-\rho^2}, \frac{2\rho\sin\phi}{1-\rho^2}, \frac{\rho^2+1}{\rho^2-1}\right) \tag{14}$$

Далее, для сферы имеем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} &= \left(\frac{2(1-\rho^2)\cos\varphi}{(1+\rho^2)^2}, \frac{2(1-\rho^2)\sin\varphi}{(1+\rho^2)^2}, \frac{4\rho}{(1+\rho^2)^2}\right); \\
\boldsymbol{m}_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= \left(\frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2}, \frac{2\rho\cos\varphi}{1+\rho^2}, 0\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Следовательно,

$$G_{\mathbb{S}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

и метрика сферы имеет вид

$$ds^2 = \frac{4\rho}{(1+\rho^2)^2} \underbrace{(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2)}_{\text{метрика плоскости}} = \frac{4}{(1+x'^2+y'^2)^2}\,(dx'^2 + dy'^2). \tag{17}$$

Теперь посмотрим, что будет на $\mathbb{L}^2$. Имеем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_1 &= \frac{\partial r}{\partial \rho} = \left(\frac{2(1+\rho^2)\cos\varphi}{(1-\rho^2)^2}, \frac{2(1+\rho^2)\sin\varphi}{(1-\rho^2)^2}, -\frac{4\rho}{(1-\rho^2)^2}\right), \\
\boldsymbol{m}_2 &= \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(\frac{2\rho\sin\varphi}{1-\rho^2}, \frac{2\rho\cos\varphi}{1-\rho^2}, 0\right).
\end{aligned} \tag{18}$$

Значит,

$$G_{\mathbb{S}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

и таким образом, метрика плоскости Лобачевского имеет вид

$$ds^2 = \frac{4\rho}{(1-\rho^2)^2} \underbrace{(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2)}_{\text{метрика плоскости}} = \frac{4}{(1-x'^2-y'^2)^2}(dx'^2 + dy'^2). \tag{20}$$

6.6. Метрика поверхности вращения. Реализация участка $\mathbb{L}^2$ в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим кривую $\boldsymbol{r}(\theta) = (l(\theta), 0, z(\theta))$, и пусть θ — натуральный параметр, т. е. $(l'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = 1$. Пусть φ – полярный угол, и уравнение поверхности вращения этой кривой вокруг оси Oz принимает вид

$$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = (l(\theta)\cos\varphi,\, l(\theta)\sin\varphi, z(\theta)). \tag{21}$$

Тогда

$$\boldsymbol{m}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (l'\cos\varphi,\, l'\sin\varphi, z'), \quad \boldsymbol{m}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = (-l\sin\varphi, l\cos\varphi, 0). \tag{22}$$

Так как θ — натуральный параметр, то $|\boldsymbol{m}_1|^2 = l'^2 + z'^2 = 1$, и метрика на поверхности вращения имеет вид

$$ds^2 = d\theta^2 + l^2(\theta)\, d\varphi^2, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^2(\theta) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Теорема 6.6. *Главными направлениями на поверхности вращения являются параллели и меридианы.*

□ В самом деле, если бы главное направление было другим, то главным было бы, очевидно, и симметричное относительно меридиана (в силу совпадения их нормальных кривизн), а точка бы оказалась сферической (см.п. 3.4). ■

Теперь найдём главные кривизны поверхности вращения. Для меридиана имеем

$$\varepsilon_1 = \boldsymbol{m}_1 = \left(l', 0'\sqrt{1-(l')^2}\right); \, \varepsilon_1' = k\varepsilon_2 = l''\left(1, 0, -\frac{l'}{\sqrt{1-l'^2}}\right) \Rightarrow |\lambda_1| = \frac{|l''|}{\sqrt{1-l'^2}} \tag{24}$$

Остаётся найти λ_2. Кривизна сечения по параллели равна $\frac{1}{\lambda(\theta)}$ (обратная величина к радиусу), а тогда по теореме Менье кривизна нормального сечения равна $\lambda_2 = \cos\alpha$, где α – угол между вектором нормали $\boldsymbol{n}$ и осью Ox. Имеем

$$\boldsymbol{n} = (\sqrt{1-(l')^2}, 0, -l'), \quad \cos\alpha = \sqrt{1(l')^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{1-(l')^2}}{l}. \tag{25}$$

Отсюда гауссова кривизна поверхности вращения при натуральной параметризации меридиана равна

$$K = \lambda_1\lambda_2 = \pm\frac{l''(\theta)}{l(\theta)}. \tag{26}$$

Выясним, можно ли представить как поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$ плоскость Лобачевского. Метрика на $\mathbb{L}^2$ имеет вид $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, d\varphi^2$. Хотелось бы взять функцию $l(\theta) = \operatorname{sh}\theta$ с натуральной параметризацией. Тогда имеем $\operatorname{ch}^2\theta + z'^2 = 1$. Но так как

$\operatorname{ch}^2\theta = 1 + \operatorname{sh}^2\theta \geq 1$, то получаем противоречие. Значит, этого сделать нельзя (хотя $\mathbb{L}^2$ и является поверхностью вращения в $\mathbb{R}^3_1$).

Теперь сделаем замену $\varphi = \mu\psi$, где $\mu < 1$. Тогда $ds^2 = d\theta^2 + \mu^2 \operatorname{sh}^2\theta d\psi^2$. Положим $l(\theta) = \mu \operatorname{sh}\theta$. Тогда

$$l'_\theta = x'_\theta = \mu \operatorname{ch}\theta,\ z'_\theta = \sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{ch}^2\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z'_\theta}{x'_\theta} = \sqrt{\frac{1}{1 - \mu^2 \operatorname{ch}^2\theta}}. \tag{27}$$

Если мы будем вращать такую кривую вокруг оси Oz, то получим поверхность в $\mathbb{R}^3$, локально изометричную плоскости Лобачевского. В силу (26) для этой поверхности $K = -1$.

6.7. Конформно-евклидовы метрики. Сумма углов геодезического треугольника на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$

Определение. Метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dy^j$ называется *конформно-евклидовой*, если существуют криволинейные координаты, в которых $ds^2 = f(M)\left(\sum(dx^i)^2\right)$, где $f(M)$ – функция, зависящая от точки, т. е. $G = f(M)E$ в некоторых координатах. Такие координаты конформно-евклидовой метрики называются *конформными* (и также *изотермическими*).

Например, метрики на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ конформно евклидовы. Вообще, можно доказать, что метрика на поверхности в $\mathbb{R}^3$ конформно евклидова.

Теорема 6.7. *В конформных координатах углы на карте равны углам в римановой метрике.*

☐ Имеем $\cos\varphi = \frac{(dr, d\tilde{r})}{|dr|\cdot|d\tilde{r}|}$. В силу конформности

$$\cos\varphi = \frac{f(M)(dx^1 d\tilde{x}^1 + \ldots + dx^n\, d\tilde{x}^n)}{\sqrt{f(M)\sum(dx^i)^2}\sqrt{f(M)\sum(d\tilde{x}^i)^2}} = \frac{(dx^1 d\tilde{x}^1 + \ldots + dx^n\, d\tilde{x}^n)}{\sqrt{\sum(dx^i)^2}\sqrt{\sum(d\tilde{x}^i)^2}}, \tag{28}$$

что есть выражение для косинуса угла между векторами на карте в стандартных координатах. ■

Теорема 6.8. *Сумма углов треугольника на сфере больше π, а на плоскости Лобачевского – меньше π.*

☐ Сначала докажем утверждение для случая $\mathbb{S}^2$. Без ограничения общности можно считать, что вершина A треугольника ABC совпадает с южным полюсом. Рассмотрим стереографическую проекцию этого треугольника на плоскость xOy, получим треугольник $A'B'C'$, причём $A \mapsto A'(0,\,0,\,0)$. При стереографической проекции прямые, проходящие через южный полюс, перейдут в прямые на плоскости. Значит, образы отрезков AB и AC будут отрезками на плоскости. Хорда сферы BC перейдёт в отрезок $B'C'$, а образ «сферического» отрезка BC будет лежать вне треугольника $A'B'C'$ (это очевидным образом следует из того, что хорда лежит ближе к центру окружности, чем дуга центрального сечения). Как было показано в п. 6.5, стереографическая проекция определяет конформнмно-евклидову форму метрики $\mathbb{S}^2$ на карте $\mathbb{R}^2$, и по предыдущей теореме углы при таком проектировании сохраняются. Значит, неравенство $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ справедливо (заметим, что проекция «сферического отрезка» AB – часть кривой второго порядка с отрезком $A'B'$ в качестве хорды). Теперь рассмотрим $\mathbb{L}^2$. Здесь рассуждения аналогичны, а треугольник надо брать такой, чтобы у него одна вершина совпадала с вершиной гиперболоида, т. е. точкой $(0,\,0,\,-1)$. Тогда одна из сторон треугольника перейдёт внутрь треугольника, образованного стереографическими проекциями вершин. Что касается точной оценки суммы углов, то она будет найдена позже. ■

6.8. Конформно эквивалентные метрики

Определение. Пусть даны две области Θ и $\widetilde{\Theta}$ с метриками G и $\widetilde{G}$ соответственно. Если существует диффеоморфизм $f:\Theta\to\widetilde{\Theta}$, сохраняющий углы, то он называется *конформным преобразованием* области Θ в $\widetilde{\Theta}$.

Метрики G и $\widetilde{G}$ называются *конформно эквивалентными*, если существует конформное преобразование Θ в $\widetilde{\Theta}$.

Лемма 6.9. *Пусть $f: V\to\widetilde{V}$ – линейное отображение n-мерных евклидовых пространств. Тогда следующие утверждения эквивалентны для любых векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$, $\tilde{\boldsymbol{a}}=f(\boldsymbol{a}),\tilde{\boldsymbol{b}}=f(\boldsymbol{b})$:*

1. $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos\angle(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{b})$;
2. $(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{\boldsymbol{b}})=\lambda^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, *где λ – некоторая константа, зависящая только от f;*
3. $|\tilde{\boldsymbol{a}}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$ (λ как в 2.).

□ $\boxed{1\Rightarrow3}$ Возьмем $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ – ортонормированный базис. Векторы $f(\boldsymbol{e}_i)$ ортогональны, так как $\cos\angle(f(\boldsymbol{e}_i),f(\boldsymbol{e}_j))=0$. Покажем, что длины векторов изменяются в одинаковое число раз.

Пусть, например, $|f(\boldsymbol{e}_1)|\neq|f(\boldsymbol{e}_2)|$. Тогда получим $\cos\angle(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\cos45^\circ\neq\cos\angle(f(\boldsymbol{e}_1),f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2))$, т.е. придём к противоречию.

$\boxed{3\Rightarrow2}$ Выразим скалярное произведение через длины векторов:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})],\quad(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{\boldsymbol{b}})=\frac{1}{2}[(\tilde{\boldsymbol{a}}+\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{a}}+\tilde{\boldsymbol{b}})-(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{\boldsymbol{a}})-(\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{b}})].\tag{29}$$

Следовательно, $(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{\boldsymbol{b}})=\lambda^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

$\boxed{2\Rightarrow1}$ Очевидно. ■

Теорема 6.10. *Метрики областей Θ и $\widetilde{\Theta}$ конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют координаты $(x^1,\ldots,x^n)$ в Θ и $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$ в $\widetilde{\Theta}$ такие, что $d\tilde{s}^2=F(A)\,ds^2$, где $F(A)$ – некоторая строго положительная функция точек $A\in\Theta$.*

□ Пусть задано $f:\Theta\to\widetilde{\Theta}$, определяемое формулами $y^i=y^i(x^1,\ldots,x^n)$, с матрицей Якоби $\left\{\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right\}$. Рассмотрим кривую $\gamma(t)=(x^1(t),\ldots,x^n(t))$ в области Θ и её образ в области $\widetilde{\Theta}$ $\widetilde{\gamma}=(y^1(x^1(t),\ldots,x^n(t)),\ldots,y^n(x^1(t),\ldots,x^n(t)))$. Имеем

$$\dot{y}^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^1}\dot{x}^1+\ldots+\frac{\partial y^i}{\partial x^n}\dot{x}^n,\tag{30}$$

следовательно, касательный вектор преобразуется следующим образом:

$$(\dot{y}^1,\ldots\dot{y}^n)^t=J(\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)^t.\tag{31}$$

(**?**) Отображение касательных пространств линейно в каждой точке $A\in\Theta$, и, значит, можно применять доказанную выше лемму. Пусть f – конформное преобразование $f:\Theta\to\widetilde{\Theta}$, сохраняющее по определению углы. Тогда по лемме, в соответствующих друг другу посредством f координатах, $\widetilde{G}=F(A)G$. Наоборот, если для каких-то криволинейных координат x^i в Θ и $\tilde{x}^i$ в $\widetilde{\Theta}$, $i=1,\ldots,n$, выполнено это соотношение, рассмотрим отображение $f:\Theta\to\widetilde{\Theta}$, при котором $(x^1,\ldots,x^n)\mapsto(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$. Метрики отличаются на множитель, а значит, все углы сохраняются.

Тем самым теорема доказана в обе стороны. ■

Легко показать, что конформность f означает, что преобразования (31) – гомотетии с коэффициентами $\sqrt{F(A)}$.

7. Внутренннее дифференцирование векторных полей на поверхностях

7.1. Производная от функции по вектору

Напомним понятие дифференцируемости функции по вектору:

Определение. Функция $f : \Theta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке a, если существует её дифференциал, т.е. линейная функция $df(x-a)$ на пространстве векторов $\{x-a\}$ такая, что $f(x) = f(a) + df(x-a) + o(|x-a|)$. Функция f называется *гладкой*, если существуют её частные производные и они непрерывны.

Гладкие функции дифференцируемы.

Определим понятие *производной от функции* $f = f(x^1, \ldots, x^n)$ *по вектору* $\boldsymbol{w} = (Y^1, \ldots, Y^n)$ в точке A следующим образом: возьмем кривую $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(x^1(t), \ldots, x^n(t))$, проходящую через точку A и такую, что $\dot{\boldsymbol{r}}(A) = (\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t)) = \boldsymbol{w}$, и положим по определению

$$\frac{df}{d\boldsymbol{w}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i = (grad\, f, \boldsymbol{w}) = \frac{\partial f}{\partial x^i} Y^i. \tag{1}$$

В случае $|\boldsymbol{w}| = 1$ это *производная* от f *по направлению* $\boldsymbol{w}$. Корректность очевидна, так как значение производной зависит только от функции и самого вектора (не зависит от выбора кривой).

Определение. Пусть в каждой точке области Θ задан вектор $\boldsymbol{w}$, координаты которого гладко зависят от точки (от координат точки). В этом случае говорят, что в области задано гладкое *векторное поле.* Производная $\frac{df}{d\boldsymbol{w}}$ теперь – функция точек $A \in \Theta$.

Рассмотрим функцию $f : M^k \to \mathbb{R}$, где M^k – некоторая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда можно определить производную функции f по касательному вектору $\boldsymbol{w}$ к M^k. Определение будет таким же, а именно.

Координаты $(x^1, \ldots, x^k)$ на поверхности можно локально продолжить до координат $(x^1, \ldots, x^k,\ x^{k+1}, \ldots, x^n)$ в области пространства (теорема 4.6). В таких координатах области поверхность задается уравнениями $x^i = 0, i = k+1, \ldots, n$. Функция f также продолжается: $f(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^k)$, получится гладкая функция в области. Тогда касательный вектор $\boldsymbol{w}$ имеет координаты $(Y^1, \ldots, Y^k,\ 0, \ldots, 0)$, следовательно, $\frac{df}{d\boldsymbol{w}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} Y^i$, где $i = 1 \ldots k$, так как остальные координаты нулевые. Следовательно, производная по вектору $\boldsymbol{w}$ не зависит от способа продолжения координат на область.

7.2. Дифференцирование векторных полей

Определение. Пусть в области $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле $\boldsymbol{v}$ и в отдельной точке $A_0 \in \Theta$ фиксирован вектор $\boldsymbol{w} = (Y^1, \ldots, Y^n)$. Производная $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{w}}$ векторного поля $\boldsymbol{v}$ по вектору $\boldsymbol{w}$ в точке A_0, обозначаемая $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$, определяется *в аффинных координатах* покоординатно. В этих координатах $\boldsymbol{v} = (X^1, \ldots, X^n)$, где $X^i = X^i(x^1, \ldots, x^n)$ – обычные функции, поэтому $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{w}} = (\frac{dX^1}{d\boldsymbol{w}}, \ldots, \frac{dX^n}{d\boldsymbol{w}})$ и в соответствии с п. 7.1 $\frac{dX^k}{d\boldsymbol{w}} = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} Y^i$.

Более подробно, рассмотрим проходящую через A_0 кривую $\boldsymbol{r}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ с касательным вектором $(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = (Y^1, \ldots, Y^n)$ в точке A_0. Подставим $\boldsymbol{r}(t)$ в уравнения поля, т. е. рассмотрим сложную вектор-функцию $X^1(\boldsymbol{r}(t)), \ldots, X^n(\boldsymbol{r}(t)) =: \boldsymbol{v}(t)$. Тогда по определению

$$\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'_t = \big((X^1)'_t, \ldots, (X^n)'_t\big) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t}(\boldsymbol{v}(t + \triangle t) - \boldsymbol{v}(t)). \tag{2}$$

Заметим, что $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ – вектор в точке A.

Более важное замечание: координаты $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ имеют такое описание *только в аффиной системе координат* – при параллельном переносе $\boldsymbol{v}(t+\triangle t)$ в точку $\boldsymbol{r}(t)$ координаты этого вектора не изменятся в аффинной системе.

Через $(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k$ будем обозначать k-ую координату производной. Имеем

$$(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}) = \left(\frac{dX^1}{d\boldsymbol{w}}, \dots, \frac{dX^n}{d\boldsymbol{w}}\right), \quad (\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\dot{x}^i = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}Y^i. \tag{3}$$

т. е. $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ в координатах есть произведение матрицы $\left\{\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right\}$ на вектор $\boldsymbol{w}$. Определение ∇ не зависит от выбора кривой, так как каждая координата ∇ зависит только от вектора $\boldsymbol{w}$ и координат поля $\boldsymbol{v}$. Можно определить производную поля $\boldsymbol{v}$ *по полю* $\boldsymbol{w}$ – производная тогда будет не отдельным вектором, а векторным полем.

Лемма 7.1. $f = const \Leftrightarrow df = 0$, *т. е. все частные производные равны* 0.

$\square$ Слева направо — очевидно. Наоборот: $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow$ функция f не зависит от x^i для всех $i \Rightarrow f = const$. $\blacksquare$

Определение. Векторное поле $\boldsymbol{v}$ называется *параллельным,* если его векторы во всех точках параллельны, сонаправлены и одинаковы по длине.

Теорема 7.2. *Векторное поле* $\boldsymbol{v} = (X^1, \dots, X^n)$ *параллельно* $\Leftrightarrow$ $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ *для всех векторов* $\boldsymbol{w}$ *в точках области.*

$\square$ Слева направо утверждение очевидно. Обратно: пусть $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$, $\forall \boldsymbol{w}$. Тогда, в частности, $\nabla e_i \boldsymbol{v} = 0$. Значит, $(\nabla e_i \boldsymbol{v})^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} = 0$. Следовательно, функции X^k не зависят от x^i для всех i, а значит, они постоянны и векторы поля постоянны. $\blacksquare$

Рассмотрим случай поля $\boldsymbol{v}$, заданного в точках кривой $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v} = (X^1(t), \dots, X^n(t))$. Введём операцию $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$ как $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} := (\dot{X}^1, \dots, \dot{X}^n)$, см. (2). Векторное поле $\boldsymbol{v}$ и координату $t = x^1$ можно локально продолжить до координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ в области $\mathbb{R}^n$, тогда окажется (см. п. 7.1), что $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla_{\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{v}$, ибо, в виду (3), $(\nabla_{\dot{\boldsymbol{r}}}\boldsymbol{v})^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{dX^k}{dt}$.

Вывод: $\frac{D}{dt}$ – частный случай ∇_w.

7.3. Свойства операторов ∇ и D в аффинном пространстве

0° Если $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ – гладкие векторные поля, то $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ – тоже гладкое поле, см. (3).

1° Линейность по $\boldsymbol{v}$: $\nabla_{\boldsymbol{w}}(\lambda\boldsymbol{v}_1 + \mu\boldsymbol{v}_2) = \lambda\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_1 + \mu\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_2$ для $\forall\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$.

$\square$ Непосредственно следует из линейности операции дифференцирования по $\boldsymbol{v}$, см. (3). $\blacksquare$

2° Правило Лейбница: $\nabla_{\boldsymbol{w}}(f\boldsymbol{v}) = df\,\boldsymbol{v} + f\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$, где $f(x^1, \dots, x^n)$ – гладкая функция.

$\square$ Пусть поле $\boldsymbol{w}$ имеет координаты $(Y^1, \dots, Y^n)$. Имеем $f\boldsymbol{v} = (fX^1, \dots, fX^n)$. Тогда

$$(\nabla_{\boldsymbol{w}}f\boldsymbol{v})^k = \frac{\partial fX^k}{\partial x^i}Y^i = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}Y^iX^k}_{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}} + f\underbrace{\frac{\partial X^k}{\partial x^i}Y^i}_{(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}X^k + f(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k. \quad \blacksquare \tag{4}$$

3° Функциональная линейность по $\boldsymbol{w}$: $\nabla_{f\boldsymbol{w}_1 + g\boldsymbol{w}_2}\boldsymbol{v} = f\nabla_{\boldsymbol{w}1}\boldsymbol{v} + g\nabla_{\boldsymbol{w}2}\boldsymbol{v}$.

$\square$ Умножение матрицы на вектор есть линейная операция, см. (3). $\blacksquare$

Теперь сформулируем свойства операции $\frac{D}{dt}$:

0° Если $\boldsymbol{v}$ – векторное поле вдоль кривой гладко зависящее от t, то $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$ – гладкая функция по t, см. (2).

1° Линейность:

$$\frac{D(\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2)}{dt}=\lambda_1\frac{D(\boldsymbol{v}_1)}{dt}+\lambda_2\frac{D(\boldsymbol{v}_2)}{dt}. \tag{5}$$

2° Правило Лейбница:

$$\frac{D(f\boldsymbol{v})}{dt}=\frac{df}{dt}\boldsymbol{v}+f\frac{D(\boldsymbol{v})}{dt}\quad \text{(вытекает из (4))}. \tag{6}$$

Свойство **3°** операции ∇ для операции $\frac{D}{dt}$ не определено.

7.4. Оператор ∇ на геометрическом многообразии (ковариантное дифференцирование)

Рассмотрим поверхность M^n в пространстве $\mathbb{R}^m_q$ и её касательное пространство TM в точке p. Предполагаем, что в случае псевдоевклидова пространства на M^n индуцируется риманова положительно определённая метрика. Пусть $\boldsymbol{v}$ – поле касательных векторов к поверхности, а $\boldsymbol{w}$ – некоторый касательный вектор. В $\mathbb{R}^m_q$ определён оператор $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ покоординатного дифференцирования, который мы можем применить к паре $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ касательных полей, т.к. эти поля могут быть продолжены на окрестность M^n в $\mathbb{R}^m_q$ и, согласно аргументам, приведённым в конце п. 7.1, результат не зависит от продолжения. В общем случае векторы полученного поля $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ не касаются поверхности M^n (для примера рассмотрите случай сферы).

Определим другую операцию дифференцирования, действующую на касательных пространствах. Оператор, определенный выше, будем обозначать через $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$, а новую операцию определим так:

$$\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}:=\mathrm{Pr}_{TM}\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}, \tag{7}$$

где Pr_{TM} есть *ортогональная проекция* на касательное пространство TM .

Аналогичным образом для касательного векторного поля вдоль кривой $\boldsymbol{r}(t)\subset M^n$ определяется $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}$.

Перечислим свойства новой операции $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$. Легко видеть, что имеют место свойства **0°** $-$ **3°**, и доказательства их практически такие же (см. п. 7.3):

0°. Пусть $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ – гладкие поля. Тогда $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ тоже гладкое.

□ Ортогонализуем базис в TM в точках координатной окрестности. Заметим, что это гладкий процесс (по отношению к координатам точки p). Поскольку касательные пространства не изотропны, то $\mathbb{R}^m=TM\oplus TM^{\perp}$ в точках M^n. Проекция – гладкая операция, а значит, и поле $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ будет гладким.

1°. *Линейность*: проекция линейна, поэтому это свойство выполняется.

2°. *Правило Лейбница*: вытекает из линейности проекции с учётом $Pr_{TM}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$.

3°. Функциональная линейность по $\boldsymbol{w}$ вытекает из линейности проекции.

Покажем, что ∇ является *внутренней операцией*, т.е., что она выражается через метрический тензор G на M^n (и, значит, зависит от вложения в $\mathbb{R}^m_q$ только через индуцированную метрику).

7.5. Символы Кристоффеля и их свойства

Пусть поверхность M^n в пространстве $\mathbb{R}^m_q$ задана параметрически уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1,\dots,x^n)$, (аффинные координаты y^i точки поверхности в пространстве являются функциями $y^i=y^i(x^1,\dots,x^n)$, где $x^1,\dots,x^n$ координаты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим касательные поля $\boldsymbol{v}(X^1,\ldots,X^n)$ и $\boldsymbol{w}(Y^1,\ldots,Y^n)$ на M^n , где $X^i = X^i(x^1,\ldots,x^n)$ и $Y^i = Y^i(x^1,\ldots,x^n)$ – координаты в базисе $\boldsymbol{m}_1,\ldots,\boldsymbol{m}_n \in TM$, $\boldsymbol{m}^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$. Займёмся вычислением координат $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$, пользуясь свойствами **0°** – **3°**:

$$\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = \nabla_{Y^j\boldsymbol{m}_i} = \big(\nabla_{\boldsymbol{m}_j}(X^i\boldsymbol{m}_i)\big)Y^j = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\boldsymbol{m}_i + X^i\nabla_{\boldsymbol{m}_j}\boldsymbol{m}_i\right)Y^j. \tag{8}$$

Введём обозначения. Выражения $\Gamma^k_{ij} := (\nabla_{\boldsymbol{m}_j}\boldsymbol{m}_i)^k$ называются *символами Кристоффеля.*

Заменим индекс суммирования i в первом слагаемом в скобке формулы (8) на k и получим:

$$\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\boldsymbol{m}_k + X^i\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{m}_k\right)Y^j = \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij}X^i\right)Y^j\boldsymbol{m}_k. \tag{9}$$

Окончательно координаты вектора $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ имеют вид

$$(\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v})^k = \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij}X^i\right)Y^j. \tag{10}$$

Таким образом, в локальной карте на n-поверхности в пространстве $\mathbb{R}^m_q$ имеется n^3 функций – символов Кристоффеля, через которые выражается операция ∇.

Теперь рассмотрим кривую $\boldsymbol{r} = (x^1(t),\ldots,x^n(t)) \subset M^n$. Тогда $Y^i = \dot{x}^i$, и для $\frac{D}{dt}$, поскольку $\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\dot{x}^j = \frac{dX^k}{dt}$, получаем в криволинейных координатах поверхности выражение

$$\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\dot{x}^j. \tag{11}$$

Замечание. Эти и последующие выводы справедливы и для обычного дифференцирования $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ в $\mathbb{R}^m_q$, *рассматриваемого в любых криволинейных координатах* $x^1,\ldots,x^m$ в области $\mathbb{R}^m_q$ (индексы i, j будут изменяться от 1 до m). Здесь дифференцирование по вектору покоординатное (проектирование тождественно), но мы рассматриваем дифференцирование по произвольному полю $\boldsymbol{w}$.

Теорема 7.3. *Координаты в области* $\mathbb{R}^m_q$ *являются аффинными тогда и только тогда, когда* $\Gamma^k_{ij} = 0$.

□ Если координаты аффинные, то очевидно, что все символы Кристоффеля нулевые. Наоборот, пусть $\Gamma^k_{ij} = 0$, то есть $\nabla_{\boldsymbol{m}_i}\boldsymbol{m}_j = 0$. Пусть $\boldsymbol{w} = Y^j\boldsymbol{m}_j$, тогда $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{m}_i = 0$, в силу свойства функциональной линейности. Но по теореме (7.2) векторы $\boldsymbol{m}_i$ постоянны. Так как $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$, то $\boldsymbol{r}$ – линейная функция от $x^1,\ldots,x^m$, $\boldsymbol{r} = (y^1,\ldots,y^m)$, $y^i = a^i_jx^j + b^i$. Следовательно, система координат – аффинная. ■

Теорема 7.4. *Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:* $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

□ Рассмотрим поверхность $\boldsymbol{r} = (y^1,\ldots,y^m) \subset \mathbb{R}^m$, где $y^i = y^i(x^1,\ldots,x^n)$, а x^i – криволинейные координаты. Надо доказать, что $\nabla_{\boldsymbol{m}_i}\boldsymbol{m}_j = \nabla_{\boldsymbol{m}_j}\boldsymbol{m}_i$. Для этого достаточно доказать, что $\nabla^0_{\boldsymbol{m}_j}\boldsymbol{m}_i = \nabla^0_{\boldsymbol{m}_i}\boldsymbol{m}_j$ (в продолженных координатах). Имеем $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$. Тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^j} = \left(\frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i\partial x^j},\ldots,\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i\partial x^j}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{m}_j}{\partial x^i}. \tag{12}$$

(Поскольку все функции гладкие, то от порядка дифференцирования ничего не зависит.) ■

7.6. Тождества Кристоффеля

Лемма 7.5. *Пусть даны три векторных поля $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}$ на геометрическом многообразии M в $\mathbb{R}^m$, тогда*

$$\frac{d(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}{d\boldsymbol{w}} = (\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_1, \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_2). \tag{13}$$

□ Для $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ это свойство можно проверить напрямую: пусть $\boldsymbol{v}_1 = (X_1^1, \ldots, X_1^m)$, $\boldsymbol{v}_2 = (X_2^1, \ldots, X_2^m)$, $\boldsymbol{w} = (Y^1, \ldots, Y^m)$. Имеем: $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = X_1^1 X_2^1 + \ldots + X_1^m X_2^m$, поэтому (см. (3)) $\frac{d(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{d\boldsymbol{w}} = \sum_i \left(X_1^i \left(\frac{\partial X_2^i}{\partial x^j} Y^j\right) + \left(\frac{\partial X_1^i}{\partial x^j} Y^j\right) X_2^i\right) = (\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_1, \nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_2)$.

Далее: $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_1 = \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1'$, $\nabla^0_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_2 = \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_2'$, векторы $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$ лежат в ортогональном дополнении к касательному пространству. Тогда $(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2') = 0$, так как $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ – касательные, следовательно, $\frac{d(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{d\boldsymbol{w}} = (\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_1, \nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}_2)$, как и требовалось. ■

Следствие 7.6. *Пусть даны векторные поля $\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{u}(t)$ на кривой $r = r(t) \subset M \subset \mathbb{R}^m$, тогда, так как D – частный случай ∇* (см. (11)),

$$\frac{d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}{dt} = \left(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{u}\right) + \left(\boldsymbol{v}, \frac{D\boldsymbol{u}}{dt}\right). \tag{14}$$

Явные формулы для Γ^k_{ij}. Воспользуемся только что доказанной леммой, применив её к векторам $\boldsymbol{m}_i$, $\boldsymbol{m}_j$. Имеем $(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j) = g_{ij}$, тогда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = (\nabla_{\boldsymbol{m}_k}\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j) + (\boldsymbol{m}_i, \nabla_{\boldsymbol{m}_k}\boldsymbol{m}_j). \tag{15}$$

Так как $\nabla_{\boldsymbol{m}_k}\boldsymbol{m}_i = \Gamma^\alpha_{ik}\boldsymbol{m}_\alpha$, то

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^\alpha_{ik} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jk} g_{\alpha i}. \tag{16}$$

Полученное равенство можно записать для любого набора индексов i, j, k. Поэтому можно написать систему уравнений, получающихся путём циклической перестановки индексов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \Gamma^\alpha_{ik} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jk} g_{\alpha i}, \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= \Gamma^\alpha_{ji} g_{\alpha k} + \Gamma^\alpha_{ki} g_{\alpha j}, \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} &= \Gamma^\alpha_{kj} g_{\alpha i} + \Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k i}. \end{aligned}$$

Из этой системы, вычитая первое равенство из суммы двух других и пользуясь симметриями компонент G и Γ, получаем *первое тождество Кристоффеля* (суммирование по индексу α):

$$\Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{17}$$

Чтобы получить отсюда выражение символов Кристоффеля, введем обратную матрицу метрики $G^{-1} = \{g^{\alpha\beta}\}$ и умножим каждое равенство Кристоффеля на $g^{k\beta}$. Просуммировав по k и α, получим слева $\Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k} g^{k\beta}$. Поскольку $g_{\alpha k} g^{k\beta} = \delta^\beta_\alpha = \left\{\begin{smallmatrix} 0, & \alpha\neq\beta; \\ 1, & \alpha=\beta. \end{smallmatrix}\right.$, то

$$\Gamma^\alpha_{ij} = \frac{1}{2} g^{\alpha k}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{18}$$

Это *второе тождество Кристоффеля* (суммирование по k).

Вывод. Из тождеств Кристоффеля следует, что символы Кристоффеля зависят только от метрики, то есть дифференцирование есть внутренняя операция (зависит только от G, но не от способа вложения $M^n \subset \mathbb{R}^m_q$).

Замечание. Используя выражение (18) символов Кристофеля через риманову метрику, операцию $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}$ можно *определить* и для абстрактных многообразий с римановой метрикой.

?? **о преобразовании Кристоффелей**

8. Геодезическая кривизна и геодезические

8.1. Геодезическая кривизна

Пусть нам задано многообразие $M^n \subset \mathbb{R}^m$ с локальной параметризацией $\mathbf{r} = \boldsymbol{r}(x^1, \ldots, x^n)$ и локальным базисом $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$, и кривая $\boldsymbol{r}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ на M^n. Пусть s – натуральный параметр для кривой, т. е. $ds = |\dot{\boldsymbol{r}}|dt$, и $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\varepsilon}_1$ – касательный вектор длины 1. Обычная кривизна в евклидовом пространстве задается формулой: $k\boldsymbol{\varepsilon}_2^0 = \frac{D^0\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}$, причем $\boldsymbol{\varepsilon}_2^0 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_1$. (Здесь D^0, как и ∇^0 – покоординатное дифференцирование в объемлющем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$).

Определение. Пусть $\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = k_g\boldsymbol{\varepsilon}_2$ – ортогональная проекция $k\boldsymbol{\varepsilon}_2^0$ на касательную плоскость. Величина k_g называется *геодезической кривизной* и представляет собой кривизну линии внутри изучаемой поверхности (если $\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = 0$, то считаем, что $k_g := 0$, а вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ не определён).

Лемма 8.1. *Если $k_g \neq 0$, то $\boldsymbol{\varepsilon}_2 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_1$ в TM.*

□ Имеем $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1) = 1$. Продифференцировав, получим $0 = \frac{d(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)}{ds} = 2\left(\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}, \boldsymbol{\varepsilon}_1\right) = 2k_g(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$. Но так как $k_g \neq 0$, то $(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_2 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_1$. ■

Лемма 8.2. $k_g\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathrm{Pr}_{TM}k\boldsymbol{\varepsilon}_2^0$.

□ В самом деле, $k_g\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = \mathrm{Pr}_{TM}\frac{D^0\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = \mathrm{Pr}_{TM}(k\boldsymbol{\varepsilon}_2^0)$.

8.2. Геодезические линии

Определим понятие кривых, являющихся аналогами прямых линий в $\mathbb{R}^m$ как линий, для которых $k = 0$.

Определение. Кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ на поверхности называется *геодезической*, если $k_g = 0$, то есть $\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = 0$.

Замечание. Если для геодезической взять параметр $t = \lambda s$, то $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}_1$, а значит, $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = 0$.

Следовательно, для определения геодезической годится любой параметр, пропорциональный натуральному.

Лемма 8.3. *Пусть дана кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, и $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$. Тогда она будет геодезической и параметр t пропорционален натуральному.*

□ Покажем, что $|\boldsymbol{v}| = const$. В самом деле, $\frac{D(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{dt} = \left(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v}\right) + \left(\boldsymbol{v}, \frac{D\boldsymbol{v}}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{v}| = const$. Следовательно, $\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{\varepsilon}_1$, и, по теореме (2.3), имеем $\mu t = s$. Отсюда $\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = \frac{D(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{v})}{d(\mu t}) = \frac{1}{\mu^2}\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$. Значит, кривая геодезическая. ■

В п. 6.1 мы объявили “прямыми” на сфере и плоскости Лобачевского центральные сечения этих поверхностей плоскостями. Покажем теперь, что они действительно «прямые»» в геодезическом смысле.

Теорема 8.4. *На $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ геодезическими являются плоские центральные сечения.*

□ Параметризуем кривую $r(s)$ сечения $\mathbb{S}^2$ или $\mathbb{L}^2$ натуральным параметром. Её касательный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, очевидно, лежит в секущей плоскости и в касательной плоскости к поверхности. Пусть $\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки на кривой. Он ортогонален касательной плоскости. Так как $\frac{D^0\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}$ лежит в секущей плоскости и ортогонален $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, то $\frac{D^0\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} \parallel \overrightarrow{OA}$. Следовательно, вектор $\frac{D^0\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds}$ ортогонален к касательной плоскости, и $\frac{D\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = \mathrm{Pr}_{TM}\frac{D^0\boldsymbol{\varepsilon}_1}{ds} = 0$.

Следовательно, центральные сечения являются геодезическими. Ниже мы докажем, что других геодезических нет. ■

Определение. Рассмотрим поверхность M^n, кривую $r(t)$ на M^n и поле $v(t)$ касательных векторов к M^n на кривой. Будем говорить, что *поле параллельно вдоль кривой*, если $\frac{Dv}{dt} = 0$.

Используя это определение, можно сказать, что кривая является геодезической $\Leftrightarrow$ поле $\boldsymbol{\varepsilon}_1(s)$ параллельно вдоль этой кривой.

8.3. Дифференциальные уравнения для геодезических

Как мы знаем, k-я координата в базисе $m_i = \frac{d\boldsymbol{r}}{dx^i}$, $i = 1, \ldots, n$, производной вектора $\boldsymbol{v} = (X^1, \ldots, X^n)$ вдоль кривой $\boldsymbol{r}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, расположенной на $M^n \subset \mathbb{R}^m$, равна $(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt})^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\dot{x}^j$. Векторное поле $\boldsymbol{v}(t)$ параллельно вдоль кривой $\Leftrightarrow$ $(\frac{D\boldsymbol{v}}{dt}) = 0$. Получаем систему уравнений для такого $\boldsymbol{v}(t)$:

$$\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

В нашем случае $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, и окончательно система имеет вид

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Очевидно, что кривая является геодезической $\Leftrightarrow$ она удовлетворяет этим уравнениям.

В системе (19) неизвестными функциями X^i являются координаты поля $\boldsymbol{v}$. Это – линейная система первого порядка. Ее называют *уравнением параллельного переноса.*

В системе (20) неизвестными служат координаты точек кривой $\boldsymbol{r}(t)$. Она нелинейна и второго порядка. Она называется *уравнением геодезических.*

Применим теорему существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, т. е. точкой x_0 на поверхности и направлением v_0. Таким образом, в окрестности любой точки в заданном направлении выходит одна и только одна геодезическая (параметр на которой определен с точностью до пропорционалдьности). Отметим также, что решение нашей системы гладко зависит от начальных условий.

Теперь теорему о «прямых» на сфере и плоскости Лобачевского можно усилить утверждением о том, что других геодезических, кроме центральных сечений, там не бывает (поскольку центральные сечения имеются по всем направлениям в каждой точке).

8.4. Геодезическая через две точки.

Как и выше, M^n – подмногообразие (n-поверхность) евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $x^1, \ldots, x^n$ – криволинейные координаты на карте M^n, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, \ldots, x^n)$. Координаты $(z^1, \ldots, z^n)$ касательных векторов в точке $A_0 \in M^n$ рассматриваются в локальном базисе $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n$, $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$.

Теорема 8.5. *В достаточно малой окрестности точки $A_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ любые две точки соединимы единственной малой геодезической.*

(Точнее: Для всякой окрестности $U(A)$ существует окрестность $V(A)$, любые две точки которой соединимы единственной геодезической в U.)

Для доказательства представим следующую специальную конструкцию. Пусть $A = (x^1, \ldots, x^n)$ – некоторая точка (в карте окрестности A_0). Через $B(t)$ обозначим точки $y^i = y^i(t, x^1, \ldots, x^n, z^1, \ldots, z^n)$ выходящей из A_0 геодезической с вектором скорости $(z^1, \ldots, z^n)$ при $t = 0$ (т.е. в точке A_0). Условимся рассматривать $(z^1, \ldots, z^n)$ вблизи нулевого вектора $(0, \ldots, 0)$. Пусть $B = B(1)$, т.е. точка с координатами $y^i(1, x^1, \ldots, x^n, z^1, \ldots, z^n), i = 1, \ldots, n$. По теореме о непрерывной зависимости решения $y^i = y^i(t)$ дифференциальных уравнений для геодезических от начальных условий ($A = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\boldsymbol{v} = (z^1, \ldots, z^n)$) точка B находится вблизи A.

Рассмотрим отображение:

$$(\underbrace{x^1, \ldots, x^n}_{A}; \underbrace{z^1, \ldots, z^n}_{v}) \mapsto (\underbrace{x^1, \ldots, x^n}_{A}; \underbrace{y^1, \ldots, y^n}_{B})$$

Лемма 8.6. *Матрица Якоби этого отображения в точке* $(\underbrace{x^1, \ldots, x^n}_{A}; 0, \ldots, 0)$ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

$\square$ Пользуемся гладкой зависимостью решения $B(t)$ от начальных условий A и $\boldsymbol{v}$. В левом верхнем углу – единичная матрица из членов $\frac{\partial x^i}{\partial x^l}$. В левом нижнем – нулевая $\frac{\partial x^i}{\partial z^j}$ (координаты точки A от направляющего вектора $v = (z^1, \ldots, z^n)$ не зависят). В правом верхнем углу – матрица E из членов $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ при $z^1 = \ldots = z^n = 0$ (так как $y^i = x^i$). В правом нижнем углу – матрица из членов $\frac{\partial y^i}{\partial z^j}$, она оказывается единичной. Покажем это.

Рассмотрим, к примеру, $\frac{\partial y^1}{\partial z^1}, \frac{\partial y^2}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial y^n}{\partial z^1}$. Чтобы получить эти частные производные, мы должны положить $z^2 = \ldots = z^n = 0$.

Так как $(z^1, 0, \ldots, 0) = z^1 \cdot \boldsymbol{m}_1$, координата $y^i(1; x^1, \ldots, x^n; z^1, 0, \ldots, 0)$ совпадает с $y^i(t; x^1, \ldots, x^n; \overbrace{1, 0, \ldots, 0}^{\boldsymbol{m}_1})$ при $t = z^1$, т.е. с $y^i(z^1; x^1, \ldots, x^n; 1, 0, \ldots, 0)$. Значит, $\frac{\partial y^i}{\partial z^1} = \dot{y}^i$, $i = 1, \ldots, n$. Но при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m}_1$ имеем $(\dot{y}^1, \ldots, \dot{y}^n) = (1, 0, \ldots, 0) = \boldsymbol{m}_1$.

Аналогичным образом, $\frac{\partial y^1}{\partial z^\alpha}, \ldots, \frac{\partial y^n}{\partial z^\alpha} = m_\alpha = (0, \ldots, 1_\alpha, 0, \ldots, 0)$.

Так как матрица Якоби невырождена, отображение в окрестности точки A_0 (для малых векторов v) обратимо, т.е. для любой пары точек $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ вблизи A_0 найдётся вектор v, такой что выходящая из точки $(x^1, \ldots, x^n)$ геодезическая с вектором $v = \frac{dr}{dt} = (z^1, \ldots, z^n)$ пройдёт через точку $(y^1, \ldots, y^n)$.

Единственность – следствие взаимной однозначности отображения. $\blacksquare$

Замечание. При фиксированной точке $A = A_0$ возникает диффеоморфное отображение $\boldsymbol{v} = (z^1, \ldots, z^n) \xrightarrow{Exp} (y^1, \ldots, y^n) = B$, которое называется *экспоненциальным.* Образ шара $|\boldsymbol{v}| \leq \varepsilon$ (расположенного в касательном пространстве многообразия

M^n в точке A_0) называют *геодезическим шаром*, окружающим A_0 в M^n, он состоит из *геодезических радиусов* – выходящих из A_0 геодезических. Граница геодезического шара называется *геодезической сферой.*

8.5. Продолжаемость геодезических.

Теорема существования обеспечивает для любой точки $A_0 \in M^n$ и любого касательного вектора $\boldsymbol{v}$ наличие проходящей через A_0 геодезической с вектором скорости $\boldsymbol{v}$ при $-\varepsilon \le s \le \varepsilon$, ε некоторое положительное число. Многообразие называется *геодезически полным*, если всякая геодезическая продолжается по s от $-\infty$ до $+\infty$.

Пример, когда это не так – открытый круг на плоскости.

Теорема 8.7. *Компактное многообразие M^n геодезически полно.*

Лемма 8.8. *Для точки $A_0 \in M^n$ найдутся окрестность U и $\varepsilon > 0$ так, что для любой точки $A \in U$ и любого единичного касательного вектора $\boldsymbol{v}$ в A проходящая через A геодезическая с вектором скорости $\boldsymbol{v}$ существует при $-\varepsilon \le s \le \varepsilon$.*

□ По теореме о непрерывной зависимости от начальных условий ($\boldsymbol{r}(0) = A_0$, $r'_s(0) = \boldsymbol{v}$) решение $r(s)$ существует в пределах $-\varepsilon_{\boldsymbol{v}} \le s \le \varepsilon_{\boldsymbol{v}}$ не только для $r(0) = A_0$ и $r'_s(0) = \boldsymbol{v}$, но и для начальных точек A в некоторой окрестности $U_{\boldsymbol{v}}$ точки A_0 и для векторов $\boldsymbol{w}$ в некоторой (конической формы) окрестности вектора $\boldsymbol{v}$. Такие конические окрестности покроют сферическую поверхность, определяюмую концами $\boldsymbol{v}$, а так как эта поверхность компактна, найдётся конечное покрытие, её покрывающее. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ – соответствующие векторы, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ – соответствующие числа, $U_1, \ldots, U_N$ – соответствующие окрестности точки A_0. Тогда утверждение леммы верно для $U = \bigcap U_i$ и $\varepsilon = \min_{1 \le i \le N}\{\varepsilon_i\}$. ■

Докажем теорему. Воспользуемся леммой: для $A \in M$ пусть U_A и ε_A – окрестность и число, доставляемые леммой. Из покрытия $\{UA\}$ многообразия M^n выберем конечное: $U_1, \ldots, U_N$. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ – соответствующие числа. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}$. Тогда всякую геодезическую из любой точки M^n можно продолжить на ε. Повторяя этот процесс для любой отдельно выбранной геодезической, мы и продолжим её бесконечно в обе стороны. ■

Предположим, что некоторая геодезическая, выходящая из точки A_0 (некомпактного) многообразия M^n, продолжаема только для всех $s < s_1 < \infty$. Пусть $K \subset M^n$ – содержащее A_0 компактное подмножество.

Теорема 8.9. *Существует $s_0 < s_1$ такое, что точки $\boldsymbol{r}(s)$ геодезической при $s > s_0$ окажутся за пределами K ($s_0 < s < s_1$).*

□ Как и в теореме 8.8, пусть $U_1, \ldots, U_N$ – покрывающие K окрестности, $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$, и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ – сответствующие числа (обеспечиваемые леммой 8.7), и пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}$. В этом случае выходящая из A_0 геодезическая за конечное число шагов длины ε продолжится до некоторой длины $s > s_1 - \varepsilon = s_0$. Ясно, что точка $\boldsymbol{r}(s)$ должна находиться вне K: если бы $\boldsymbol{r}(s) \in K$, то геодезическую можно было бы продолжить ещё на один ε-шаг, что невозможно ввиду того, что должно быть $s < s_1$. ■

8.6. Полугеодезические координаты на двумерной поверхности

Определение. Если метрика поверхности имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$, то координаты (u^1, u^2) называются полугеодезическими ($g_{22} = g_{22}(u^1, u^2)$).

Лемма 8.10. *В полугеодезических координатах u^1-линии – геодезические.*

□ Рассмотрим некоторую u^1-линию γ. Её параметр u^1 будет натуральным, так как при $u^2 = const$ имеем $ds^2 = (du^1)^2$, то есть $ds = du^1$ и $|\dot\gamma| \equiv 1$. Нужно доказать, что $\frac{Dm_1}{du^1} = 0$. Поскольку $\frac{Dm_1}{du^1} = \nabla_{m_1} m_1 = \Gamma^{\alpha}_{11} m_\alpha$, то нужно доказать, что $\Gamma^{\alpha}_{11} = 0, \forall\alpha$. В полугеодезических координатах $g_{11} = 1$, значит, $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^k}$=0, и $g_{12} = 0$. Тогда

$$\Gamma^{\alpha}_{11} = \frac{1}{2} g^{\alpha\, k} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} \right) = 0, \tag{21}$$

что и требовалось. ■

Теорема 8.11. *В окрестности любой точки поверхности существуют полугеодезические координаты.*

□ Проведём через точку A_0 произвольную гладкую линию $\boldsymbol{r}(t) = (u^1(t), u^2(t))$ и из каждой ее точки в ортогональном направлении выпустим геодезическую. Введем новые координаты (v^1, v^2). В качестве v^2 возьмём параметр t проведенной кривой. В качестве координаты v^1 возьмем натуральный параметр s этих геодезических. Имеем $u^i = u^i(v^1, v^2) = u^i(s,t)$ – гладкие функции (гладкая зависимость решения уравнения геодезической от натурального параметра s и от начальных условий для t). На самой кривой векторы $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ ортогональны, поэтому матрица Якоби $\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$ невырождена, так что (v^1, v^2) – новые координаты. Остаётся показать, что они полугеодезические.

В самом деле, $g_{11} = 1$, так как параметр v^1 натуральный. Докажем, что $g_{12} = 0$. В любой точке кривой $\boldsymbol{r}$ координаты ортогональны, а значит на этой кривой $g_{12} = 0$. Так как $\frac{\partial g_{11}}{\partial v^i} = 0$, то

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) = g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}. \tag{22}$$

Теперь заметим, что $\Gamma^{\alpha}_{11} = (\nabla_{m_1} m_1)^{\alpha} = 0$, так как v^1-линии геодезические. Значит, $g^{1\,2} \frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = \Gamma^1_{11} = 0$. По формуле обратной матрицы $g^{12} = -\frac{g_{12}}{\det G}$, откуда $\frac{g_{12}}{\det G} \frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0$.

Тогда либо $g_{12} = 0$ и всё доказано, либо $\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0$. Но в этом случае g_{12} не зависит от v_1, а поскольку на кривой $r(t)$ имеем $g_{12} = 0$, то $g_{12} \equiv 0$.

Следствие 8.12. *Любую геодезическую можно (локально) включить в полугеодезические координаты.*

□ Проведем кривую, ортогональную этой геодезической. Через каждую точку на ней проведем ортогонально ещё геодезические, и таким образом получим нужные координаты. ■

8.7. Экстремальное свойство геодезических

А теперь докажем экстремальное (и пожалуй, главное) свойство геодезических линий.

Теорема 8.13. *Геодезическая локально кратчайшая.*

Рассмотрим геодезическую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1)$ и включим её, как указано выше, в полугеодезические координаты, тогда она будет некоторой u^1-линией. Рассмотрим другую кривую $\tilde{\boldsymbol{r}}$, проходящую через точку A на кривой $\boldsymbol{r}$.

Назовём точку $(u^1(s), u^2(s))$ на кривой $\tilde{\boldsymbol{r}}$ *хорошей*, если $\frac{du}{ds} \neq 0$ – вблизи неё можно выразить u^2 через u^1, и *плохой* в противном случае (на рисунке b^1 и b^2 – плохие точки). На множестве хороших точек, представляя $\tilde{\boldsymbol{r}}$ функцией $u^2 = u^2(u^1)$, получаем, что длина этого куска кривой будет равна

$$\int \sqrt{1 + g_{22} \left(\frac{du^2}{du^1} \right)^2} du^1. \tag{23}$$

Длина геодезической для $u^2 = 0$ на хорошем участке будет равна $\int du^1$, т. е. во всяком случае не больше, а так как $\frac{du^2}{du^1}$ где-то не нуль, если кривые не совпадают, то сумма длин на хороших участках для геодезической строго меньше. Плохих точек для геодезической нет вообще, а длина кривой $\tilde{r}$ по плохому множеству неотрицательна. Короче говоря, наличие плохих точек делает кривую ещё длиннее, а для хорошего множества у нас есть формула (23). ■

9. Параллельный перенос и гауссова кривизна

9.1. Параллельный перенос векторов на многообразиях

Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^m$ – поверхность с индуцированной римановой метрикой. Векторное поле $\boldsymbol{v}$ *параллельно*, если $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = 0$ для всех $\boldsymbol{w}$. На самом деле достаточно выполнение этого условия для всех $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{m}_i$, то есть достаточно, чтобы $(\nabla_{\boldsymbol{m}_j}\boldsymbol{v})^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij}X^i = 0$ – система из n^2 уравнений (здесь $\boldsymbol{v} = (X^1, \ldots, X^n)$).

Поле, параллельное на всем многообразии может не существовать. Нам важен случай полей параллельных вдоль кривых на многообразии.

Определение. Пусть дано касательное к M^n векторное поле $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ вдоль кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \subset M^n \subset \mathbb{R}^m$. Вектор $\boldsymbol{v}(t)$ имеет начало в точке $\boldsymbol{r}(t)$.

Поле $\boldsymbol{v}(t)$ называется *параллельным* вдоль $\boldsymbol{r}(t)$, если $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$, т. е. $\frac{D^0\boldsymbol{v}}{dt} \perp TM$.

Пример. Возьмем геодезическую $\boldsymbol{r}(s)$ и рассмотрим поле $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$. Оно параллельно, так как по определению геодезической $\frac{D\boldsymbol{v}}{ds} = 0$.

Сформулируем некоторые свойства полей, параллельных вдоль кривой.

1°. Если поле $\boldsymbol{v}$ параллельно, то $\lambda\boldsymbol{v}$ тоже параллельно.

2°. Определение параллельности не зависит от параметризации, так как: $\frac{D\boldsymbol{v}}{d\tau} = \frac{D\boldsymbol{v}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$ и $\frac{D\boldsymbol{v}}{d\tau} = 0$, если $\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} = 0$.

3°. Если поля $\boldsymbol{v}^1$ и $\boldsymbol{v}^2$ параллельны, то поле $\lambda_1\boldsymbol{v}^1 + \lambda_2\boldsymbol{v}^2$ также параллельно.

Лемма 9.1. *Пусть векторные поля $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны по кривой $r(t)$. Тогда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = const$.*

$$\Box \qquad \frac{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{dt} = \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}, \frac{D\boldsymbol{b}}{dt}\right) = (0, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, 0) \qquad \blacksquare \tag{24}$$

Следствие 9.2. *Если вектор $\boldsymbol{a}$ параллелен вдоль кривой, то вдоль неё он имеет постоянную длину.*

Следствие 9.3. *Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны, то угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ постоянен, поскольку*

$$\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = const.$$

Напишем уравнения параллельности векторного поля $\boldsymbol{a}$ вдоль кривой:

$$\left(\frac{Da}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

Фиксируем точку A_0 на кривой и вектор $\boldsymbol{a}_0 = (X^1, \ldots, X^n)$ в этой точке. Тогда решение системы (25) с такими начальными условиями локально существует и единственно (в этой системе $\Gamma^k_{ij}(t)$ и $\dot{x}^j(t)$ известные функции).

Определение. *Параллельным переносом вектора* $\boldsymbol{a}_0$ по (вдоль) $\boldsymbol{r}(t)$ называется параллельное поле $\boldsymbol{a}(t)$, такое что $\boldsymbol{a}(t_0) = \boldsymbol{a}_0$.

Теорема. 9.4. *Для вектора* $\boldsymbol{a}_0$ *в точке* A_0 *существует, причём единственный, его параллельный перенос* $\boldsymbol{a}(t)$ *вдоль* $\boldsymbol{r}(t)$.

□ Покажем *единственность.* Пусть существует два решения $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, тогда у всех векторов $\boldsymbol{a}_1(t)$ и $\boldsymbol{a}_2(t)$ одинаковая длина и угол между ними. А в нулевой момент времени $|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{a}_0|$, и угол между ними равен нулю. Следовательно, векторные поля $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ совпадают.

Существование. В окрестности каждой точки решение соответствующей системы существует при любых начальных данных в точке, ср. п. 8.5, а из покрытия окрестностями кривой $\boldsymbol{r}(t)$ можно выделить локально конечное подпокрытие. Согласование решений на соседних окрестностях следует из единственности. ■

Так как система (25) однородна, то перенос линейной комбинации $\boldsymbol{a}_0 = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{a}_{0i}$ равен линейной комбинации $\boldsymbol{a}(t) = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{a}_i(t)$ переносов векторов $\boldsymbol{a}_{0i}$. Таким образом, из точки A_0 вдоль $r(t)$ жёстким образом (без изменения длин и углов) переносится всё касательное пространство.

Рассмотрим локальный базис из касательных векторов $\boldsymbol{m}_i$ в некоторой точке A_0. Перенесём их параллельно вдоль кривой, получим векторы $\tilde{\boldsymbol{m}}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. При параллельном переносе вследствие сохранения углов базис в A_0 перейдёт в базис в A_t. Совокупность этих базисов для всех t будем называть *параллельным* вдоль $r(t)$.

Разложим $\boldsymbol{a}(t)$ по этому базису: $\boldsymbol{a}(t) = \widetilde{X}^i(t)\tilde{\boldsymbol{m}}_i(t)$.

Следствие 9.5. *Векторное поле* $\boldsymbol{a}(t)$ *параллельно* $\Leftrightarrow$ *его координаты* $(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n)$ *в базисах* $\{\tilde{\boldsymbol{m}}_i\}$ *постоянны.* ■

Теперь дадим «внутреннее» определение ковариантной производной $\frac{D}{dt}$. Для этого введём следующее обозначение (оно будет использоваться и в дальнейшем). Рассмотрим касательное поле $\boldsymbol{a}(t)$ на кривой, перенесем вектор $\boldsymbol{a}(t+h)$ в точку t (назад) параллельно. Результат такого переноса будем обозначать через $\boldsymbol{a}_h(t)$.

Теорема 9.6. *Имеет место равенство*

$$\frac{D\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{a}_h(t) - \boldsymbol{a}(t)}{h}\,. \tag{26}$$

□ Пусть $\{\widetilde{\boldsymbol{m}}_i\}$ – параллельный базис. Тогда $\boldsymbol{a} = \widetilde{X}^i(t)\widetilde{\boldsymbol{m}}_i$. Продифференцируем по правилу Лейбница:

$$\frac{D\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{\boldsymbol{m}}_i + \widetilde{X}^i \frac{D\widetilde{\boldsymbol{m}}_i}{dt} = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{\boldsymbol{m}}_i. \tag{27}$$

Второе слагаемое обратится в 0, так как базис $\{\widetilde{\boldsymbol{m}}_i\}$ параллелен.

Теперь преобразуем правую часть в (26). Имеем $\boldsymbol{a}(t+h) = \widetilde{X}^i(t+h)\widetilde{\boldsymbol{m}}_i$. В параллельном базисе координаты не меняются, следовательно, $\boldsymbol{a}_h(t) = \widetilde{X}^i(t+h)\boldsymbol{m}_i$. В точке t:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{a}_h(t) - \boldsymbol{a}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{X}^i(t+h) - \widetilde{X}^i(t)}{h}\widetilde{\boldsymbol{m}}_i = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{\boldsymbol{m}}_i. \tag{28}$$

Полученное выражение правой части совпадает с (27). ■

9.2. Вращение векторного поля вдоль кривой

Рассмотрим двумерное многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$ и кривую $\boldsymbol{r}(t)$ на нём. Пусть также задано два векторных поля $\boldsymbol{a}(t)$ и $\tilde{\boldsymbol{a}}(t)$ с векторами единичной длины, и поле $\tilde{\boldsymbol{a}}(t)$ параллельно вдоль $\boldsymbol{r}(t)$, причём $\tilde{\boldsymbol{a}}(t_0) = \boldsymbol{a}(t_0)$.

Выясним «физический смысл» производной $\frac{D}{dt}$. Обозначим через $\triangle\varphi$ величину изменения угла между параллельным полем и полем $\boldsymbol{a}(t)$. Кроме того, считаем поверхность M ориентированной и $\triangle\varphi$ величиной со знаком: берется угол от $\tilde{\boldsymbol{a}}(t)$ до $\boldsymbol{a}(t)$, он же от $\tilde{\boldsymbol{a}}(t_0)$ до $\boldsymbol{a}_h(t_0)$.

Теорема 9.7. $|\dot{\varphi}| = |\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}|$.

□ Применяя обозначения предыдущего параграфа, имеем в точке $\boldsymbol{r}(t_0)$:

$$\left|\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{a}_h(t)-\boldsymbol{a}(t)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{a}_h(t)-\boldsymbol{a}(t)}{\triangle\varphi}\right|\cdot\left|\frac{\triangle\varphi}{h}\right|. \tag{29}$$

Первый множитель стремится к 1, так как это первый замечательный предел, а второй есть $|\dot{\varphi}|$. ■

Таким образом, *ковариантная производная – это скорость отклонения векторного поля от параллельного.*

В каждой точке кривой выберем вектор $\boldsymbol{b}\in TM$ такой, что $|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{b}(t)\perp\boldsymbol{a}(t)$ и пара $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ положительно ориентирована. Существование требуемого поля $\boldsymbol{b}(t)$ очевидно. Поскольку поле $\boldsymbol{b}(t)$ может быть получено процессом ортогонализации из $\boldsymbol{a}(t)$ и любого неколлинеарного с $\boldsymbol{a}(t)$ гладкого поля, $\boldsymbol{b}(t)$ – гладкое поле. Имеем $|\dot{\varphi}| = \left|\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}\right|$, $\dot{\varphi} = \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b}\right) = \pm\left|\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}\right|$ (так как $\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}\perp\boldsymbol{a}$, $\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}\parallel\boldsymbol{b}$) и $|\boldsymbol{b}|=1$. Получаем формулу для отклонения векторного поля от параллельного переноса $\boldsymbol{a}(t_0)$:

$$\triangle\varphi = \int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b}\right)dt = \int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{D^0\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b}\right)dt. \tag{30}$$

Последнее равенство следует из того, что $\frac{D^0\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{D\boldsymbol{a}}{dt} + \boldsymbol{a}'$, где $\boldsymbol{a}'$ ортогонален поверхности, и при скалярном умножении на $\boldsymbol{b}$ получится 0. Заметим, что $\triangle\varphi$, выражаясь через внутреннее дифференцирование $\frac{D}{dt}$, не зависит от способа изометричного вложения M в $\mathbb{R}^m_q$. Одновременно имеем $\dot{\varphi} = \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b}\right)$.

В частном случае, когда $t=s$, $\boldsymbol{a}(s) = \boldsymbol{\varepsilon}_1(s)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = k_g\boldsymbol{b}$, получаем: $\triangle\varphi = \int\limits_{s_0}^{s} k_g\,ds$ – угол отклонения траектории от «прямого» движения.

9.3. Обнос вектора вдоль замкнутого контура

Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ – замкнутая кривая на поверхности, $\boldsymbol{a}$ – некоторый единичный вектор, касающийся поверхности в точке $A_0=\boldsymbol{r}(t_0)$, $\tilde{\boldsymbol{a}}$ – результат параллельного переноса $\boldsymbol{a}$ после одного оборота, $\triangle\omega$ – угол от $\boldsymbol{a}$ до $\tilde{\boldsymbol{a}}$. Считаем, что поверхность ориентирована. Положительным направлением обхода считаем то, для которого касательный вектор и вектор, направленный внутрь контура, имеют нужную ориентацию. Условимся рассматривать сравнительно малые контуры, ограничивающие некоторые области. Заметим, что (из соображений непрерывности) $\triangle\omega$ мало отличается от нуля для малых контуров.

Полезные наблюдения:

1. $\triangle\omega$ не зависит от выбора $\boldsymbol{a}$ в точке A_0, так как можно обнести всю касательную плоскость как жёсткое целое (см. п.9.1).

2. $\triangle\omega$ не зависит и от выбора точки A_0, так как, чтобы получить из обхода с началом в A обход с началом в A', надо сначала вычесть обход участка от A до A' (перейти к началу в A'), а затем добавить его же (чтобы закончить обход в A').

3. При смене направления обхода $\triangle\omega$ заменится на $-\triangle\omega$ (так как $\tilde{\boldsymbol{a}}$ перейдёт в $\boldsymbol{a}$). Поэтому раз и навсегда договоримся рассматривать только положительные обходы.

4. $\triangle\omega$ не зависит от ориентации поверхности, ибо при смене ориентации, хотя и изменяется направление отсчёта углов от вектора до вектора, но одновременно изменится на обратное и направление обхода контура.

Не нужно удивляться тому, что $\triangle\omega \neq 0$. Например, пусть a касается экватора. Так как экватор и меридианы – геодезические на сфере, то после обнесения a по экватору на угол $\frac{\pi}{2}$, затем до полюса по меридиану, а затем по другому меридиану в исходную точку, получим вектор $\tilde{a}$, направленный по меридиану, так что $\triangle\omega = \frac{\pi}{2}$.

Поскольку параллельный перенос определяется операцией внутреннего дифференцрования, $\triangle\omega$ – инвариант поверхности (не зависит от способа вложения M^n в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{R}^m_q$).

Теорема 9.8. *Сумма углов геодезического треугольника на M^2 равна $\alpha+\beta+\gamma = \pi + \triangle\omega$*

$\square$ В самом деле, пусть α, β, γ – углы геодезического треугольника ABC, $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор, касающийся дуги AB в точке A. При его параллельном обнесении по контуру треугольника от A к B, затем к C и снова к A (треугольник берем с нужной ориентацией) получился бы вектор $\tilde{\boldsymbol{a}}$, с углом от $\boldsymbol{a}$, равным $\triangle\omega$.

Условимся, однако, что в точке B сделан разворот $\boldsymbol{a}$ на угол $\pi-\beta$, после которого вектор будет касаться BC. Аналогично в точке C сделаем разворот на углол $\pi-\gamma$, затем в точке A – на угол $\pi-\alpha$, в результате чего получим снова $\boldsymbol{a}$, т.е. к $\triangle\omega$ добавились углы такие, что $\triangle\omega + (\pi-\beta) + (\pi-\gamma) + (\pi-\alpha) = 2\pi$. ■

Угол $\triangle\omega$ представляет значительный интерес. Попытаемся его вычислить.

Пусть $\boldsymbol{a}(u^1, u^2)$ – произвольное (гладкое) продолжение вектора $\boldsymbol{a}$ в точке A_0 на весь контур такое, что $|\boldsymbol{a}(t)| = 1$, $\boldsymbol{b}$ – ортогональное векторное поле нужной ориентации, $|\boldsymbol{b}| = 1$.

Теорема 9.9. $\triangle\omega = -\oint \left(\frac{D\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right) dt = -\oint \left(\frac{D^0\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right) dt.$

$\square$ Доказательство – следствие предыдущей формулы для $\triangle\varphi$. Знак минус объясняется тем, что $\triangle\varphi$ – угол от параллельного вектора $\tilde{\boldsymbol{a}}$ до $\boldsymbol{a}$, а $\triangle\omega$ – наоборот, угол от $\boldsymbol{a}$ до $\tilde{\boldsymbol{a}}$. ■

Уточнение. Строго говоря, равенство верно с точностью до $2\pi k$, ибо продолженное векторное поле $\boldsymbol{a}(t)$ может по контуру совершить несколько полных оборотов, в то время как угол $\triangle\omega$ определён в пределах $\pm 2\pi$.

В частности, в качестве $\boldsymbol{a}$ в точке A_0 можно взять $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{dr}{ds}$, в качестве $\boldsymbol{a}(t)$ – векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ по всему контуру. В этом случае

$$\triangle\omega = -\oint k_g\, ds + 2\pi \tag{31}$$

или

$$\triangle\omega + \oint k_g\, ds = 2\pi \tag{32}$$

Появление 2π объясняется тем, что для малых контуров $\triangle\omega$ мало, в то время как интеграл, выражающий отклонение $\boldsymbol{\varepsilon}_1(s) = \frac{dr}{ds}$ от параллельного переноса, близок к 2π.

9.4. Интегральная формула для угла отклонения результата обноса вектора по контуру

В качестве $\boldsymbol{a}$ в точке A_0 контура можно взять любой единичный вектор. Пусть u^1, u^2 – криволинейные координаты в области в M^2, содержащей контур, $\boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}$. Пусть, например, $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{m}_1}{|\boldsymbol{m}_1|}$, $\boldsymbol{b}$ векторные поля, получающиеся в результате процесса ортогонализации (и нормирования) полей $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$. Считаем, что $\boldsymbol{r}(t) = (u^1(t), u^2(t))$.

Теорема 9.10. *Для ортонормированных векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ положительной ориентации на содержащей контур карте u^1, u^2*

$$\triangle\omega = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u^2} \right) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2}, \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u^1} \right) \right] du^1\, du^2. \tag{33}$$

□ Имеем

$$\frac{D^0 \boldsymbol{a}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt}.$$

Следовательно, в силу предыдущего пункта

$$\triangle\omega = \oint \left(\frac{D^0 \boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b} \right) dt = - \oint \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \boldsymbol{b} \right) du^1 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2}, \boldsymbol{b} \right) du^2 \right]$$

Применяя формулу Грина к ограниченной кривой области S, получаем

$$\triangle\omega = - \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2}, \boldsymbol{b} \right) du^1\, du^2 - \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \boldsymbol{b} \right) du^1\, du^2 \right].$$

(Этот переход можно объяснить и непосредственно. Например, $\iint_S \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \boldsymbol{b} \right) du^1\, du^2$ после интегрирования по u^2 сводится к разности двух интегралов $\int \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \boldsymbol{b} \right) du^1$ – по верхней части границы контура и по нижней, оба – слева направо по переменной u^1. Меняя направление интегрирования на верхней дуге для положительности обхода, получаем, что указанная разность совпадает с $- \oint \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \boldsymbol{b} \right) du^1$. Аналогично для первого двойного интеграла.)

После выполнения операций дифференцирования $\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}$ скалярных произведений, приняв во внимание симметрию вторых производных $\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1}$, получим окончательно нужную формулу. ■

Замечание. В доказательстве (применяя формулу Грина) мы существенно пользуемся тем, что наш контур лежит в *односвязной* области, например, в области покрытой одной координатной картой. Область на плоскости называется односвязной, если каждый гладкий замкнутый контур без самопересечений ограничивает область диффеоморфную кругу. (Мы ограничимся этим определением, чтобы не заниматься ненужными нам обобщениями.)

Далее приведем полученную формулу к виду $\triangle\omega = \iint_S K(A) d\sigma$, где K – функция от точек поверхности.

Заметим, что $d\sigma = |[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2]|\, du^1\, du^2 = \sqrt{|G|} du^1\, du^2$. Поделив и умножив на $\sqrt{|G|}$ подинтегральное выражение в (33), получим

$$K(A) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u^2} \right) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2}, \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial u^1} \right) \right]. \tag{34}$$

Лемма 9.11. *Полученная функция $K(A)$ действительно является функцией точек поверхности, т.е. не зависит ни от выбора криволинейных координат u^1, u^2, ни от выбора векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.*

□ Если у нас есть функции $K_1(A)$, $K_2(A)$, и существует такая точка A, что $K_1(A) \neq K_2(A)$, тогда они не совпадают и в некоторой окрестности S этой точки. Тогда $\triangle\omega = \iint_S K_1(A)d\sigma \neq \iint_S K_2(A)d\sigma = \triangle\omega$. Противоречие. ■

В соответствии с концом предыдущего пункта получаем так называемую *формулу Гаусса-Бонне*:

$$\iint_S K\,d\sigma + \oint k_g\,ds = 2\pi. \tag{35}$$

9.5. Критерий евклидовости двумерной поверхности

Функцию $K(A)$ естественно называть *функцией кривизны* поверхности в её точках.

Теорема 9.12. $K(A) = 0$ *в области поверхности в точности тогда, когда поверхность локально изометрична евклидовой плоскости.*

□ Если область изометрична области в евклидовой плоскости, то $\triangle\omega = 0$ по любым контурам, поэтому в силу интегральной формулы $K(A) = 0$.

Пусть $K(A) = 0$ в (односвязной) области в M^2. В этом случае из $\triangle\omega = 0$ заключаем легко, что *параллельный перенос векторов из точки в точку не зависит от путей переноса.* Фиксируем некоторую точку A, проведём через неё любую геодезическую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ с натуральным параметром t, и при каждом t проведём в обе стороны ортогональные геодезические с натуральным параметром σ вдоль них. Получим вокруг A полугеодезические координаты σ, t (п. 7.12), в которых поверхность представляется как $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma, t)$, причём $ds^2 = (d\sigma)^2 + g(dt)^2$. Достаточно показать, что $g = g(\sigma, t) = 1$ при всех σ (не только при $\sigma = 0$).

Пусть $\boldsymbol{a}(\sigma, t) = \boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}$, $|\boldsymbol{a}| = 1$.

Лемма 9.13. *Поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$ *параллельно по области координат* $(\sigma,\, t)$.

□ Учитывая, что результат переноса не зависит от пути, перенесём $\boldsymbol{a}$ из точки A_1 в A_2 следующим образом: сперва по σ-линии из A_1 до $\sigma = 0$, т.е. в точку кривой $\boldsymbol{r}(t)$, затем по $\boldsymbol{r}(t)$ до пересечения с $\boldsymbol{r}(t)$ геодезической σ-линии точки A_2, затем по этой линии до A_2. Поскольку перенос осуществлялся по участкам геодезических и $\boldsymbol{a} \perp \dot{\boldsymbol{r}}$ при $\sigma = 0$, в результате переноса получим $\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}$ в точке A_2. Это означает параллельность $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\sigma, t)$. ■

Поскольку к точке A_2 можно подойти по кривой с любым наперед заданным вектором $\boldsymbol{w}$, то $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{a} = 0$ во всех точках и для всех $\boldsymbol{w}$. В частности, $\nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_1 = 0$

Пусть $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$. Имеем $\frac{D\boldsymbol{e}_2}{d\sigma} = \nabla_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_2 = \nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_1 = 0$, т.е. $\boldsymbol{v}e_2$ параллельно по σ и его длина не изменяется, но при $\sigma = 0$ имеем $|\boldsymbol{e}_2| = 1$. Тем самым $g = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$. ■

9.6. Случай поверхности в $\mathbb{R}^3$. Инвариантность гауссовой кривизны

Теорема 9.14. *В случае двумерной поверхности в* $\mathbb{R}^3$ *функция* $K(A)$ *совпадает с гауссовой кривизной.*

□ Воспользуемся формулой для $K(A)$, п. 9.4. Вычислим функцию K в произвольной точке A. Сдвинем начало координат в точку A и повернём координаты так, что плоскость xOy станет касательной, а направления Ox и Oy – главными. Поверхность в окрестности A можно задать как $z = f(u^1, u^2)$, где $u^1 = x$, $u^2 = y$. Вычислим функцию $K(A)$ в точке $A = (0,\, 0)$. Имеем $\boldsymbol{m}_1 = (1, 0, f'_x)$, $\boldsymbol{m}_2 = (0, 1, f'_y)$. Поскольку плоскость xOy касается поверхности, то в A $f'_x = f'_y = 0$ и $\det G = 1$. Теперь выберем векторные поля. Положим

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{m}_1}{|\boldsymbol{m}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}} \cdot (1, 0, f'_x), \tag{36}$$

а векторное поле $\boldsymbol{b}$ получим с помощью ортонормализации векторов $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$.

Приступим к вычислению $K(A)$. Поскольку $f'_x(A) = 0$, а $f''_{xx}(A) = \lambda_1$ (см. п. 3.5), имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^1} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} = \Big(\frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}\Big)'_x \cdot (1,0,f'_x) + \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}} \cdot (0,0,f''_{xx}) = (0,0,f''_{xx}) = (0,0,\lambda_1). \tag{37}$$

Так как направления Ox и Oy главные, то $f''_{xy} = 0$ (см. п. 3.5) и мы имеем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} = 0 + \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}} \cdot (0,0,f''_{xy}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u^2}, \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial u^1}\Big) = 0. \tag{38}$$

Остаётся найти третью координату вектора $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial y}$. Положим $\boldsymbol{m} = \alpha \boldsymbol{m}_1 + \beta \boldsymbol{m}_2$, где α и β – функции, зависящие от точки. Тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial y} = \alpha'_y \boldsymbol{m}_1 + \alpha \frac{\partial \boldsymbol{m}_1}{\partial y} + \beta'_y \boldsymbol{m}_2 + \beta \frac{\partial \boldsymbol{m}_2}{\partial y}\,. \tag{39}$$

В этом равенстве в точке A z-координаты векторов $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ нулевые. Кроме того, $\frac{\partial \boldsymbol{m}_1}{\partial y} = 0$, так как в точке A направления Ox и Oy главные, и $f''_{xy} = 0$. Следовательно, $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial y}(A) = \beta\big(*,*,f''_{yy}\big) = \beta(*,*,\lambda_2)$. Найдём коэффициент β: в точке A имеем $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_2$, поэтому $\beta(A) = 1$. Значит, $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial y}(A) = (*,*,\lambda_2)$. Таким образом, $K(A) = \lambda_1\lambda_2 = K$. ■

Следствия 9.15.

1. Гауссова кривизна $K = \lambda_1\lambda_2$ – внутренний инвариант поверхности M (не зависит от способа вложения $M \subset \mathbb{R}^3$, хотя главные кривизны λ_1, λ_2 этим свойством не обладают). Для поверхностей, локально изометричных плоскости (и только для них, см. п. 9.5), $K = 0$.

2. Для поверхностей, для которых $K = const$, $\triangle\omega = K\sigma$, где σ – площадь односвязной области, ограниченной контуром.

3. Для сферы $\mathbb{S}^2$ радиуса 1 $K = K(\mathbb{S}^2) = 1$, поэтому сумма углов геодезического треугольника есть $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \sigma$.

Для плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ (см. п. 6.6) $K = -1$, и на ней $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi - \sigma$.

4. При обходе по замкнутому контуру на сфере радиуса 1 в силу формулы Гаусса-Бонне касательный вектор повернётся на угол $\triangle\varphi = \oint k_g ds = 2\pi - \sigma$. Чем больше радиус обхода, тем меньше $\triangle\varphi$. На экваторе $\sigma = 2\pi$ и $\triangle\varphi = 0$ – движение по экватору параллельное.

На плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ при аналогичных обходах $\triangle\varphi = 2\pi + \sigma$. Чем больше радиус обхода, тем больше окажется вращение касательного вектора за один обход.

10. Добавление: о комплексных структурах на поверхностях

Определение. Пусть нам задана поверхность и две системы координат (две карты): (u^1, u^2) и (v^1, v^2).

Сопоставим координатам (u^1, u^2) число $z := u^1 + iu^2 \in \mathbb{C}$, а координатам (v^1, v^2) – число $w := v^1 + iv^2 \in \mathbb{C}$.

Говорят, что гладкие преобразования координат $u^i = u^i(v^1, v^2)$ вместе с обратными являются *комплексными*, если они являются овеществлением взаимно обратных комплексно дифференцируемых отображений $z = F(w)$, $w = \Phi(z)$.

Говорят, что на поверхности задана *комплексная структура*, если задан атлас из карт с комплексными преобразованиями координат на любых пересечениях карт атласа.

(Аналогичным образом определяются *аналитические* структуры (преобразования координат аналитичны), *дифференциальные или гладкие* (преобразования – диффеоморфизмы) и другие.)

Теорема 10.1. *На сфере $\mathbb{S}^2$ существует комплексная структура.*

□ Осуществим стереографические проекции сферы $\mathbb{S}^2$ (единичного радиуса) из южного и северного полюсов S и N соответственно. Пусть $A' = (x', y')$ – проекция точки A из северного полюса, и $A'' = (x'', -y'')$ – проекция из южного полюса (здесь знак “минус” взят для удобства). Пусть $z = x' + iy'$ и $w = x'' + iy''$.

Заметим, что если $\rho = OA'$ и $\tilde{\rho} = OA''$, то $\rho\tilde{\rho} = 1$. В самом деле, $\frac{\tilde{\rho}}{1} = \frac{OA''}{OS} = \frac{ON}{OA'} = \frac{1}{\rho}$ (см. п. 6.5).

Следовательно, $zw = 1$, так как $|z||w| = \rho\tilde{\rho} = 1$, а аргументы у них противоположные, то есть $\arg(zw) = 0$. Таким образом, $z = \frac{1}{w}$, и на $\mathbb{S}^2$ удалось ввести комплексную структуру с помощью атласа из двух карт (их пересечение – дополнение к полюсам). ■

Комплексная структура на $\mathbb{S}^2$ связана с метрикой. В комплексной форме метрика сферы имеет вид

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}$$

Выразим x и y через z и $\bar{z}$: $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Тогда $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$. Если в этой метрике подставить $z = \frac{1}{w}$, то получим $ds^2 = \frac{4dwd\bar{w}}{(1+w\bar{w})^2}$, т.е. на общей части двух карт сферы запись метрики оказывается при замене координат инвариантной.

Под дифференцируемым преобразованием координат на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ понимается функция $w = w(z)$, имеюшая дифференциал $dw = \frac{dw}{dz}dz$ в точках её определения. Если представить w как $w = u + iv$ и z как $z = x + iy$, то окажется, что при овеществлении интересующее нас комплесное преобразование превратится в гладкое (и даже аналитическое) вида $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Это следует из того, что $u = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$, $v = \frac{1}{2}(w - \bar{w})$ – линейные (следовательно – дифференцируемые) замены, w (и $\bar{w}$) – комплексно дифференцируемые функции от z (и $\bar{z}$), и, наконец, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ (аналитичность $u(x, y)$ и $v(x, y)$ доказывается в комплексном анализе). Таким образом, наличие на поверхности комплексной структуры автоматически обеспечивает наличие вещественной аналитической структуры.

Используем обозначение $\frac{dw}{dz} = c = a+ib$ и запишем матрицу этого преобразования:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (c + \bar{c}) & (c - \bar{c})i \\ -(c - \bar{c})i & (c + \bar{c}) \end{pmatrix}.$$

Якобиан этого преобразования есть $\frac{1}{4}(c+\bar{c})^2-(c-\bar{c})^2=c\bar{c}=a^2+b^2$.

Докажем, что функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ удовлетворяют *условию Коши-Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С одной стороны $dw=cdz=(a+ib)(dx+idy)=(adx-bdy)+i(bdx+ady)$.
С другой $dw=du+idv=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+i(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)$.

Сравнивая коэффициенты, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-b=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

В частности, якобиан этого преобразования есть $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=a^2+b^2$, в согласии с предыдущим вычислением.

Теорема 10.2. *Пусть* Γ *– поверхность в* $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$*, являющаяся графиком комплексной аналитической функции* $w=w(z)$*. Эта поверхность допускает комплексную структуру. На* Γ *из* $\mathbb{R}^4$ *индуцируется конформно-евклидова метрика, допускающая комплексную запись* $ds^2=(1+w'_z\bar{w}'_z)dzd\bar{z}$.

(Под Γ понимается множество точек $(z,\, w(z))\in\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$.)

$\square$ Области в $\mathbb{C}$, содержащиеся *в области определения* $w(z)$, задают на Γ комплексный атлас, поэтому Γ имеет комплексную структуру.

Положим $z=x+iy$, $w=u+iv$, при этом $(dzd\bar{z}=dx^2+dy^2;\ dz=dx+idy,\ d\bar{z}=dx-idy)$, аналогично для w. Поверхность Γ состоит из точек $(x,y,u(x,y),v(x,y))\in\mathbb{R}^4$. Базисные касательные векторы имеют вид $m_1=(1,0,u'_x,v'_x)$, $m_2=(0,1,u'_y,v'_y)$. Имеем $g_{11}=(m_1,m_1)=1+u'^2_x+v'^2_x$, $g_{22}=(m_2,m_2)=1+u'^2_y+v'^2_y=g_{11}$ – в силу условий Коши-Римана. В силу этих же условий $g_{12}=(m_1,m_2)=0$.

В итоге $ds^2=(1+u'^2_x+v'^2_x)(dx^2+dy^2)$.

С другой стороны скалярное произведение векторов $p,\, q\in\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$ записывается как $(p,\, q)=z\bar{z}_1+w\bar{w}_1$ $(p=(z,w),\ q=(z_1,w_1))$. В частности, скалярный квадрат вектора $(dz,w'_zdz)=dr$ записывается как $dzd\bar{z}+w'_z\bar{w}'_z\,dzd\bar{z}=(1+w'_z\bar{w}'_z)dzd\bar{z}=(dr,dr)=ds^2$, т.е. $ds^2=(1+w'_z\bar{w}'_z)dzd\bar{z}=(1+|w'_z|^2)dzd\bar{z}$. ■

Сопоставляя два выражения для ds^2, получаем снова: $|w'_z|^2=w'_z\bar{w}'_z=u'^2_x+v'^2_x$.

Предыдущая теорема имеет множество различных обобщений. Рассмотрим одно из них. Пусть $P(z)$ – многочлен степени n на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, все корни которого имеют кратность 1, и Γ – множество точек (z,w) в $\mathbb{C}\times\mathbb{C}=\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$, удовлетворяющих уравнению $w^q=P(z)$, где q – некоторое натуральное число.

Теорема 10.3. *Множество* Γ *– поверхность с комплексной структурой на ней.*

$\square$ Комплексный градиент $\left(\frac{\partial F}{\partial z},\, \frac{\partial F}{\partial w}\right)$ функции $F(z,w)=w^q-P(z)$ есть $(-P'_z,\, qw^{q-1})$. Он отличен от нулевого $(0,0)$: при $w=0$ также $P(z)=0$, поэтому $P'_z\neq 0$ (используем однократность корней). Таким образом, по теореме о неявных функциях (в её комплексном варианте) при $w\neq 0$ локально $w=f(z)$, а в точках Γ, где $P'_z\neq 0$, – $z=z(w)$. В тех точках, где определены обе функции f и g, они взаимно обратны. Теорема – следствие предыдущей. ■

Рассмотрим вложение $\mathbb{C}\subset\mathbb{S}^2$, определяемое первой (из двух) стереографической проекцией. Так как оно определяет (вместе, конечно, со второй проекцией) на $\mathbb{S}^2$ комплексную структуру, определено сохраняющее комплексные структуры многообразий включение $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}\times\mathbb{C}\subset\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ – замыкание образа рассмотренной выше поверхности $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (состоящее, очевидно, из пополненного точкой $(\infty, \infty) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ множества Γ: при конечных z координата w конечна, а при $z \to \infty$ также $w \to \infty$).

Теорема 10.4. *Поверхность* $\widetilde{\Gamma}$ *компактна, но имеет особенность в точке* (∞, ∞). *При чётном* $n = 2k$ *и* $q = 2$ *она состоит в окрестности этой точки из двух обычных карт, склененных в точке. Поверхность всюду допускает комплексную структуру, и из* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *на ней индуцируется конформно-евклидова метрика.*

$\square$ Компактность $\widetilde{\Gamma}$ – следствие замкнутости в компактном множестве $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. При $z \to \infty$ соответствующая точка на $\mathbb{S}^2$ (при первой стереографической проекции) стремится к "северному полюсу" N сферы. Поэтому для изучения поведения $\widetilde{\Gamma}$ вблизи (∞, ∞) следует рассматривать коодинаты вторых стереографических карт. В окрестности этой точки $w = \pm\sqrt{P(z)}$ (при $q = 2$), $P(z) \neq 0$, поэтому $\widetilde{\Gamma}$ имеет вблизи N две ветви. Так как $w \to \infty$ при $z \to \infty$, обе ветви в точке N соприкасаются. Переходя от (z, w) к координатам $(\tilde{z} = \frac{1}{z}, \tilde{w} = \frac{1}{w})$, зависимость между новыми координатами получим в виде $\tilde{w}^2 = \pm\frac{\tilde{z}^n}{Q(\tilde{z})}$, где $Q(\tilde{z}) = z^n P(\frac{1}{z})$, $\tilde{w} = \pm\frac{\tilde{z}^k}{\sqrt{Q\tilde{z}}}$ при чётном $n = 2k$.

Заметим, что $Q(0) \neq 0$, поэтому $\tilde{z} = 0$ лежит в области определения $\tilde{w} = \tilde{w}(\tilde{z})$ и $\tilde{w}(0) = 0$ (причём $(0, 0)$ – новые координаты N).

Комплексная структура в точках $\widetilde{\Gamma}$, отличных от $N = (\infty, \infty)$ – следствие теоремы 8.3, поскольку $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ – комплексный диффеоморфизм на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \setminus (\infty, \infty)$. Наличие комплексной структуры на каждой из ветвей вблизи $N = (\infty, \infty)$ – следствие тех же аргументов, если использовать вложение $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, определяемое вторыми стереографическими картами.

Метрика в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ записывается как $ds^2 = dzd\bar{z} + dwd\bar{w}$. В стереографических координатах на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (определяемыми первыми стереографическими проекциями) метрика $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ имеет вид $ds^2 = 4\left(\frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} + \frac{dwd\bar{w}}{(1+w\bar{w})^2}\right)$ (см. теорему 8.1).

Как было отмечено выше, в точках Γ локально $w = f(z)$, либо $z = g(w)$. Подставляя любое из этих соотношений в выражение для ds^2, получим либо $ds^2 = \Phi(z, \bar{z})dzd\bar{z}$, либо $ds^2 = \widetilde{\Phi}(w, \bar{w})dwd\bar{w}$ – конформный вид метрики. Эти же аргументы применимы и к ветвям вблизи точки $N = (\infty, \infty)$, если координаты на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ задать вторыми стереографическими проекциями сфер $\mathbb{S}^2$ – множителей $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. $\blacksquare$

Замечание. При $q = 2$ и $n = 2k$, сохраняя на картах комплексную структуру, компактную поверхность $\widetilde{\Gamma}$ можно мысленно освободить от склейки в точке (∞, ∞), объявив склеенные карты различными. Получим обычную поверхность (двумерное многообразие) с комплексной структурой и конформно-евклидовой метрикой на ней.

Оказывается, таким образом может быть получена поверхность, гомеоморфная любой наперёд заданной ориентируемой компактной поверхности (см. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, Современная геометрия, Москва, "Наука" ,1986, часть II, п.2. в §4 главы 1, или А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии, Москва, Физматлит, 2004, п. 4.6).

Тем самым любое двумерное компактное ориентируемое многообразие допускает комплексную структуру и конформно-евклидову метрику.