

Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова  
Механико-математический факультет

Весенний семестр, 2022 г.

Программа по курсу  
**“Классическая дифференциальная геометрия”**

Проф. О. И. Мохов  
кафедра высшей геометрии и топологии

## Вопросы билетов

1. Элементарная кривая (простая дуга) в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, параметризация. Параметризованные кривые, эквивалентность. Регулярная параметризация, регулярные кривые, замена регулярного параметра на регулярной кривой. Различные способы задания регулярной кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, их локальная эквивалентность. Примеры.
2. Касательная прямая к регулярной кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, ее свойства. Соприкосновение регулярных кривых в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, порядок соприкосновения.
3. Длина кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Натуральная параметризация, ее свойства. Вектор кривизны и кривизна регулярной кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, их геометрический смысл и свойства. Примеры. Критерий того, что регулярная кривая в  $n$ -мерном евклидовом пространстве является прямой. Точки спрямления регулярной кривой. Бирегулярность.
4. Бирегулярные кривые, вектор главной нормали и соприкасающаяся плоскость бирегулярной кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Плоские бирегулярные кривые постоянной кривизны. Радиус кривизны, центр кривизны и соприкасающаяся окружность бирегулярной кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, свойства соприкасающейся окружности.
5. Формулы для вектора кривизны и кривизны регулярной кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве для произвольной регулярной параметризации.
6. Плоские регулярные кривые. Коориентация плоской регулярной кривой и кривизна со знаком. Формулы Френе плоской регулярной кривой. Натуральные уравнения плоской регулярной кривой и теорема о восстановлении плоской регулярной кривой по кривизне. Явные формулы восстановления плоской регулярной кривой по кривизне. Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру.
7. Огибающая семейства плоских регулярных кривых. Эволюта и эвольвента плоской кривой, их свойства. Теорема Тэйта–Кнезера о соприкасающихся окружностях плоских кривых.
8. Бирегулярные кривые в трехмерном евклидовом пространстве (бирегулярные пространственные кривые). Вектор бинормали бирегулярной пространственной кривой, репер Френе и формулы Френе. Кривизна и кручение, их свойства и геометрический смысл. Бирегулярные пространственные кривые постоянной кривизны и кручения. Критерий того, что бирегулярная пространственная кривая является плоской. Точки уплощения бирегулярной пространственной кривой.
9. Вектор Дарбу бирегулярной пространственной кривой, его геометрический смысл.
10. Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости бирегулярной пространственной кривой. Локальный вид кривой в проекциях на соприкасающуюся, нормальную и спрямляющую плоскости.
11. Формулы для кручения бирегулярной пространственной кривой в натуральной и произвольной регулярной параметризациях.
12. Натуральные уравнения бирегулярной пространственной кривой и теорема о восстановлении бирегулярной пространственной кривой по кривизне и кручению.

13. Деривационные уравнения эволюции репера в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, зависящего от параметра, и условия эволюции ортонормированного репера. Поле ортонормированных реперов вдоль кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве и кривая в группе ортогональных преобразований, кососимметричность ее вектора скорости в единице группы.
14. Репер Френе вдоль кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве,  $k$ -регулярные кривые, формулы Френе и теорема о восстановлении  $(n - 1)$ -регулярной кривой в  $n$ -мерном евклидовом пространстве по кривизнам.
15. Регулярные криволинейные системы координат в области  $n$ -мерного евклидова пространства, замена регулярных координат в области  $n$ -мерного евклидова пространства. Координатные линии и  $k$ -мерные координатные поверхности, их регулярность. Репер векторов скорости координатных линий, его матрица Грама и ее свойства. Примеры регулярных криволинейных систем координат.
16. Понятие о римановых и псевдоримановых метриках, заданных в области  $n$ -мерного евклидова пространства. Примеры. Метрика  $n$ -мерного евклидова пространства в криволинейных координатах, примеры. Регулярные кривые в криволинейных координатах, длина кривой.
17. Деривационные уравнения для репера векторов скорости координатных линий регулярной криволинейной системы координат в области  $n$ -мерного евклидова пространства. Символы Кристоффеля, их явное выражение через метрику и закон преобразования.
18. Совместные системы дифференциальных уравнений и теорема Дарбу об условиях совместности системы дифференциальных уравнений специального типа. Примеры.
19. Условия совместности деривационных уравнений для репера векторов скорости координатных линий регулярной криволинейной системы координат в области  $n$ -мерного евклидова пространства. Тензор кривизны Римана. Плоские римановы метрики. Условия совместности линейных систем (“уравнения нулевой кривизны”).
20. Теорема о восстановлении регулярной криволинейной системы координат в области  $n$ -мерного евклидова пространства по плоской римановой метрике. Евклидовы координаты для плоских римановых метрик.
21. Элементарное  $k$ -мерное подмногообразие (элементарная  $k$ -мерная поверхность) в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Параметризация, регулярная параметризация. Регулярные  $k$ -мерные поверхности. Различные способы задания регулярных  $k$ -мерных поверхностей, их локальная эквивалентность.
22. Координаты на регулярной  $k$ -мерной поверхности в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, замена координат. Координатные линии, их регулярность, векторы скорости координатных линий. Регулярные кривые на регулярных  $k$ -мерных поверхностях. Касательное и нормальное пространства в точке регулярной  $k$ -мерной поверхности, их свойства. Базис в касательном пространстве, его матрица Грама и ее свойства. Ортонормированный базис в нормальном пространстве.
23. Векторные поля на регулярных  $k$ -мерных поверхностях в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Необходимые и достаточные условия на векторные поля, задаваемые векторами скорости координатных линий некоторой системы коор-

- динат на регулярной  $k$ -мерной поверхности. Коммутатор векторных полей.
24. Первая квадратичная форма регулярной  $k$ -мерной поверхности как пример римановой метрики, ее свойства и закон преобразования при замене координат, скалярное произведение в касательных пространствах регулярной  $k$ -мерной поверхности. Длина регулярной кривой на регулярной  $k$ -мерной поверхности. Элемент объема регулярной  $k$ -мерной поверхности.
25. Разложения Гаусса и Вайнгартена для регулярной  $k$ -мерной поверхности в  $n$ -мерном евклидовом пространстве (деривационные формулы). Символы Кристоффеля, закон преобразования. Вторые квадратичные формы и коэффициенты кручения регулярной  $k$ -мерной поверхности, их законы преобразования при замене координат. Операторы Вайнгартена, их выражение через первую и вторые квадратичные формы регулярной  $k$ -мерной поверхности, закон преобразования.
26. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории подмногообразий в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Уравнения Гаусса для регулярного  $k$ -мерного подмногообразия в  $n$ -мерном евклидовом пространстве и тензор кривизны Римана.
27. Уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци и уравнения Риччи для регулярного  $k$ -мерного подмногообразия в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Формулировка теоремы Бонне для регулярных  $k$ -мерных подмногообразий в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Подмногообразия без кручения. Гиперповерхности.
28. Регулярные двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Различные способы задания, их локальная эквивалентность.
29. Разложения Гаусса и Вайнгартена для регулярных двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве (деривационные формулы). Первая и вторая квадратичные формы, их законы преобразования. Символы Кристоффеля, закон преобразования. Оператор Вайнгартена, закон преобразования. Элемент площади регулярной двумерной поверхности.
30. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории регулярных двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Уравнения Гаусса и тензор кривизны Римана.
31. Уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци для регулярных двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Тензор Кодацци и его симметричность.
32. Теорема Бонне для регулярных двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.
33. Регулярные кривые на регулярной двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Длина регулярной кривой на поверхности. Условие пересечения двух регулярных двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве по регулярной кривой. Нормальная составляющая вектора ускорения кривой на поверхности. Нормальные сечения поверхности. Кривизна нормального сечения.
34. Кривизна кривой на поверхности. Асимптотические направления. Теорема Менье. Примеры применения теоремы Менье.
35. Главные кривизны и главные направления. Собственные значения пары фундаментальных квадратичных форм поверхности. Теорема Эйлера. Экстремаль-

ные свойства главных кривизн.

36. Гауссова кривизна и средняя кривизна поверхности. Различные типы точек на поверхности, их свойства. Индикатриса Дюпена.

37. Соприкасающийся параболоид.

38. Оператор Вайнгартена, его собственные значения и собственные направления. Формулы Родрига. Сферическое отображение (отображение Гаусса) и оператор Вайнгартена. Третья квадратичная форма на поверхности, ее свойства.

39. Сопряженные направления в касательной плоскости. Сопряженная координатная сеть. Ортогональная сопряженная координатная сеть. Линии кривизны.

40. Теорема Гаусса (Egregium).

41. Формулы Бибербаха для гауссовой кривизны регулярной двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве (с доказательством).

42. Изометрия, локальная изометрия. Инварианты локальной изометрии. Изгибание поверхностей. Примеры. Внутренняя геометрия поверхности.

43. Тангенциальная нормаль регулярной кривой на двумерной поверхности. Дериационные формулы для кривой на поверхности. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезическое кручение. Формулы для геодезической кривизны кривой. Коориентация кривой на поверхности. Геодезическая кривизна со знаком.

44. Геодезические линии на поверхности. Уравнения геодезических линий, их свойства. Теорема о существовании и единственности геодезической линии в данном направлении на поверхности. Примеры.

45. Поверхности вращения. Теорема Клеро. Поведение геодезических на поверхностях вращения. Примеры.

46. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Геодезические как экстремали функционала длины.

47. Полугеодезические координаты и их свойства. Теорема о существовании полугеодезических координат на поверхности.

48. Геодезические как локально кратчайшие кривые на поверхности. Примеры.

49. Классификация поверхностей постоянной гауссовой кривизны с точностью до локальной изометрии.

50. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой на поверхности. Свойства ковариантной производной. Параллельный перенос векторов вдоль кривой на поверхности, ковариантно постоянные векторные поля вдоль кривой на поверхности. Ковариантное дифференцирование векторных полей на поверхности, его свойства.

51. Теорема Гаусса–Бонне для многоугольников на поверхности и для замкнутых поверхностей, с эйлеровой характеристикой (с доказательством).

52. Формула для угла поворота вектора при параллельном перенесении по замкнутому контуру на поверхности.

53. Геометрия Лобачевского. Реализация плоскости Лобачевского на псевдосфере в псевдоевклидовом пространстве. Модели плоскости Лобачевского (модели Кэли–Кляйна и Пуанкаре в круге, модель Пуанкаре в верхней полуплоскости), их изометрии, метрики, геодезические. Псевдосфера Бельтрами.

54. Поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны.