

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

Весенний семестр, 2014 г.

Программа по курсу

“Классическая дифференциальная геометрия”

Проф. О. И. Мохов
кафедра высшей геометрии и топологии

Вопросы билетов

1. Криволинейные системы координат в области n -мерного евклидова пространства. Координатные линии и координатные поверхности. Репер векторов скорости координатных линий, его матрица Грама и ее свойства.
2. Понятие о римановых и псевдоримановых метриках, заданных в области евклидова пространства. Метрика евклидова пространства в криволинейных координатах.
3. Дериwационные формулы для репера векторов скорости координатных линий криволинейной системы координат n -мерного евклидова пространства. Символы Кристоффеля.
4. Условие совместности дериwационных уравнений для репера векторов скорости координатных линий криволинейной системы координат n -мерного евклидова пространства. Тензор кривизны Римана. Плоские метрики.
5. Ортогональные криволинейные системы координат в n -мерном евклидовом пространстве и диагональность метрики. Коэффициенты Ламе. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат, вид метрики в них.
6. Элементарная кривая (простая дуга) в n -мерном евклидовом пространстве, параметризация. Параметризованные кривые, эквивалентность. Регулярные кривые. Различные способы задания регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве, их локальная эквивалентность.
7. Касательная прямая к регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве, ее свойства. Соприкасновение кривых в n -мерном евклидовом пространстве.
8. Длина кривой в n -мерном евклидовом пространстве. Натуральная параметризация, ее свойства.
9. Кривизна кривой в n -мерном евклидовом пространстве, ее геометрический смысл и свойства. Вектор кривизны кривой.
10. Бирегулярные кривые в n -мерном евклидовом пространстве. Вектор главной нормали и соприкасающаяся плоскость бирегулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве. Радиус кривизны кривой в n -мерном евклидовом пространстве, соприкасающаяся окружность, ее свойства.
11. Формулы для вектора кривизны и кривизны кривой в n -мерном евклидовом пространстве для произвольной регулярной параметризации.
12. Плоские кривые. Коориентация кривой и кривизна со знаком. Формулы Френе плоской кривой.
13. Поле реперов Френе вдоль кривой и кривая в группе ортогональных преобразований, кососимметричность ее вектора скорости в единице группы.
14. Натуральные уравнения плоской кривой и теорема о восстановлении плоской кривой по кривизне. Явные формулы восстановления плоской кривой по кривизне. Интеграл кривизны по замкнутому плоскому контуру.
15. Эволюта и эвольвента плоской кривой, их свойства.

16. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве. Формулы Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой, их свойства и геометрический смысл.
17. Вектор Дарбу пространственной кривой, его геометрический смысл.
18. Соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости пространственной кривой. Локальный вид кривой в проекциях на соприкасающуюся, нормальную и спрямляющую плоскости.
19. Формулы для кручения пространственной кривой в натуральной и произвольной параметризациях.
20. Натуральные уравнения пространственной кривой и теорема о восстановлении пространственной кривой по кривизне и кручению.
21. Формулы Френе для кривой в n -мерном евклидовом пространстве.
22. Элементарное k -мерное подмногообразие (элементарная k -мерная поверхность) в n -мерном евклидовом пространстве. Параметризация. Регулярные k -мерные поверхности. Различные способы задания регулярных k -мерных поверхностей, их локальная эквивалентность.
23. Координаты на k -мерной поверхности. Координатные линии на k -мерной поверхности, их векторы скорости. Касательное пространство в точке k -мерной поверхности и его свойства, базис в касательном пространстве, его матрица Грама и ее свойства.
24. Нормальное пространство в точке k -мерной поверхности, его свойства, ортонормированный базис в нормальном пространстве.
25. Первая квадратичная форма k -мерной поверхности как пример римановой метрики, свойства и закон преобразования, квадратичная форма в касательных пространствах k -мерной поверхности.
26. Разложения Гаусса и Вайнгартена для k -мерной поверхности. Вторые квадратичные формы и коэффициенты кручения k -мерной поверхности.
27. Деривационные формулы для k -мерной поверхности в n -мерном евклидовом пространстве. Символы Кристоффеля. Операторы Вайнгартена, их выражение через первую и вторые квадратичные формы k -мерной поверхности.
28. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории подмногообразий в n -мерном евклидовом пространстве. Уравнения Гаусса для k -мерного подмногообразия в n -мерном евклидовом пространстве и тензор кривизны Римана.
29. Формулировка теоремы Бонне для k -мерных подмногообразий в n -мерном евклидовом пространстве. Подмногообразия без кручения. Гиперповерхности.
30. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Способы задания.
31. Разложения Гаусса и Вайнгартена для двумерных поверхностей. Первая и вторая квадратичные формы. Символы Кристоффеля. Оператор Вайнгартена. Деривационные уравнения.
32. Условия совместности деривационных уравнений и фундаментальные уравнения теории поверхностей. Уравнения Гаусса и тензор кривизны Римана.

33. Уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци для двумерных поверхностей. Тензор Кодацци и его симметричность.
34. Совместные системы дифференциальных уравнений и теорема об условиях совместности системы дифференциальных уравнений специального типа.
35. Векторные поля на k -мерных поверхностях в n -мерном евклидовом пространстве. Необходимые и достаточные условия на векторные поля, задаваемые векторами скорости координатных линий на k -мерной поверхности. Коммутатор векторных полей. Условия совместности линейных систем (“уравнения нулевой кривизны”).
36. Теорема Бонне для двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.
37. Кривые на поверхности. Условие регулярности кривой пересечения двух регулярных поверхностей. Нормальная составляющая вектора ускорения. Нормальные сечения поверхности. Кривизна нормального сечения.
38. Кривизна кривой на поверхности. Асимптотические направления. Теорема Менье. Примеры.
39. Главные кривизны и главные направления. Собственные значения пары фундаментальных квадратичных форм поверхности. Гауссова кривизна и средняя кривизна поверхности.
40. Теорема Эйлера. Экстремальные свойства главных кривизн.
41. Оператор Вайнгартена, его собственные значения и собственные направления. Формулы Родрига.
42. Различные типы точек на поверхности, их свойства. Индикатриса Дюпена.
43. Сопряженные направления в касательной плоскости. Сопряженная координатная сеть. Ортогональная сопряженная координатная сеть. Линии кривизны.
44. Теорема Гаусса (Egregium).
45. Изометрия, локальная изометрия. Инварианты локальной изометрии. Изгибание поверхностей. Внутренняя геометрия поверхности.
46. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности. Формулы для геодезической кривизны кривой.
47. Геодезические линии на поверхности. Уравнения геодезических линий, их свойства. Теорема о существовании и единственности геодезической линии в данном направлении на поверхности.
48. Поверхности вращения. Теорема Клеро.
49. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой на поверхности. Параллельный перенос векторов вдоль кривой на поверхности. Ковариантное дифференцирование на поверхности.
50. Полугеодезические координаты и их свойства. Теорема о существовании полугеодезических координат.
51. Геодезические как локально кратчайшие кривые на поверхности.
52. Классификация поверхностей постоянной гауссовой кривизны с точностью до локальной изометрии.