

# Программа курса "Прикладные проблемы геометрии"

лектор Мищенко А.С.  
весенний семестр, 2017 г., 5-й курс

1. Понятие гладкого многообразия.
2. Касательное пространство.
3. Касательное расслоение.
4. Дифференциал гладкого отображения.
5. Теорема Уитни.
6. Кокасательное расслоение.
7. Тензорные расслоения.
8. Риманова метрика как сечение тензорного расслоения.
9. Многообразия как конфигурационные пространства.
10. Сечения касательного расслоения как векторные поля.
11. Группа преобразований векторного поля.
12. Коммутатор векторных полей.
13. Дифференциальные формы как сечения тензорных расслоений.
14. Инвариантная формулировка ковариантной производной.
15. Ковариантная производная в сечениях векторного расслоения.
16. Тождество Лейбница ковариантной производной.
17. Тензор кривизны.
18. Тензор кривизны как дифференциальная форма.
19. Второе тождество Бьянки.
20. Дифференциал тензора кривизны  $dR=0$ .
21. Ковариантная производная в произвольных тензорах.
22. Внешнее умножение дифференциальных форм.
23. Формула Вейля-Чженя.
24. Описание задачи на дифференциальные операторы на многообразии.
25. Что такое символ дифференциального оператора, главный символ.
26. Построение дифференциального оператора по главному символу. Степень неоднозначности построения.
27. Описание дифференциального оператора при помощи преобразование Фурье.
28. Пространства Шварца.
29. Псевдодифференциальные операторы в  $R^n$ .
30. Соболевские нормы.
31. Соболевские пространства.

32. Оценки норм ПДО.
33. Теорема Соболева о компактности операторов.
34. Общая теория компактных операторов.
35. Ядро и коядро фредгольмова опертора.
36. Индекс фредгольмова оператора.
37. Гомотопические свойства фредгольмовых операторов.
38. Гомотопическая инвариантность индекса фредгольмова оператора.
39. Естественные обобщения ПДО на случай векторных расслоений.
40. Построение векторных расслоений.
41. Теорема Уитни и проекторно-значные функции.
42. Редукция ПДО на векторных расслоениях к тривиальным расслоениям.
43. Понятие  $K$ -теории как гомотопического функтора.
44. Пунктированные пространства.
45. Точная последовательность, последовательность Пушпе.
46. Гомотопическая формулировка вычисления индекса эллиптических ПДО.
47. Формула Атья-Зингера.
48. Периодичность Ботта.
49. Разностная конструкция  $K$ -теории.
50. Длинные разностные конструкции. Редукция к коротким. Тензорное произведение.
51. Прямой образ для вложения многообразий.
52. Почти комплексная структура на касательном расслоении.
53. Построение характеристических классов векторных расслоений.
54. Главные расслоения, классифицирующие пространства.
55. Точные гомотопические последовательности для расслоений.
56. Спектральные последовательности.
57. Построение характеристических классов векторных расслоений.
58. Пример: когомологии  $BU(1)$ .
59. Пример: когомологии  $BU(n)$ .
60. Главные расслоения, классифицирующие пространства.
61. Образующие  $U$  для описания характеристических классов.
62. Роды, род Тодда.

## Список литературы

- [1] Б. В. Федосов. Аналитические формулы индекса эллиптических операторов. *Тр. ММО*, 30:159–241, 1974.
- [2] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их приложения*. Наука, М., 1984.
- [3] Р. Том. Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий. In *Расслоенные пространства и их приложения*, pages 293 – 351. ИЛ, М., 1958.
- [4] Р. Пале. *Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе*. "Мир Москва, 1970.
- [5] М. Хирш. *Дифференциальная топология*. Мир, М., 1979.
- [6] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: I. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):484–530, 1968.
- [7] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: II. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):531–545, 1968.
- [8] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: III. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):546–604, 1968.
- [9] M.F. Atiyah. Global theory of elliptic operators. *Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo 1969)*. Tokyo, Univ. Tokyo Press, pages 21–30, 1970.
- [10] Luke, G. and Mishchenko, A. S., *Vector Bundles and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1998
- [11] Hatcher, A., *Vector bundles and K-theory*, <http://www.math.cornell.edu/hatcher/#VBKT>, 2009
- [12] Милнор, Дж., Сташеф, Дж.Д., *Характеристические классы*, Мир, 1979