

Программа курса "Прикладные проблемы геометрии"

лектор Мищенко А.С.
весенний семестр, 2014 г., 5-й курс

1. Теория индекса эллиптических операторов.
 - (a) Понятие дифференциального оператора на многообразии, главный символ оператора
 - (b) Псевдодифференциальные операторы (ПДО) на многообразиях
 - (c) Соболевские нормы и ограниченность ПДО в соболевских пространствах
 - (d) Теорема вложения Соболева (о компактности вложения соболевских пространств)
 - (e) Компактные и фредгольмовы операторы
 - (f) Индекс фредгольмова оператора и его свойства
 - (g) Альтернатива Фредгольма
 - (h) Обобщение эллиптической задачи на случай векторных расслоений
 - (i) Трактовка эллиптичности в терминах векторных расслоений
 - (j) Гомологическая формула Атья-Зингера для вычисления индекса эллиптического оператора
2. Вполне интегрируемые системы.
 - (a) Конфигурационное пространство. Примеры нетривиальных конфигурационных пространств: плоский маятник, пространственный маятник, двузвенный плоский маятник, твердое тело с закрепленной точкой.
 - (b) Фазовое пространство, примеры.
 - (c) Касательное расслоение.
 - (d) Вариационные задачи, уравнения Эйлера.
 - (e) Определение симплектического пространства M , $\dim M = 2n$.
 - (f) Симплектическая форма ω на симплектическом пространстве, ее свойства.
 - (g) Функция Гамильтона, система уравнений Гамильтона.

- (h) Косой градиент функции, скобка Пуассона
- (i) Первый интеграл.
- (j) Векторные поля и их обобщения - распределения плоскостей.
- (k) Теорема Фробениуса. Несколько формулировок.
- (l) Приведение симплектической формы к каноническому виду. Теорема Дарбу.
- (m) Коммутирующие векторные поля и группы диффеоморфизмов
- (n) Конечномерные алгебры Ли векторных полей и группы диффеоморфизмов
- (o) Теорема Неттер о симметриях и первых интегралах
- (p) Теорема Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем
- (q) Некоммутативная версия полной интегрируемости
- (r) Пример интегрируемости динамики твердого тела с закрепленной точкой

Список литературы

- [1] В.И. Арнольд, В.В. Козлов, and А.И. Нейштадт. Математические аспекты классической и небесной механики. In *Итоги науки и техники*, number 3 in Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Динамические системы, pages 9 – 43. ВИНТИ, 1985.
- [2] В.В. Трофимов and А.Т. Фоменко. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*. Факториал, М., 1995.
- [3] Б. В. Федосов. Аналитические формулы индекса эллиптических операторов. *Тр. ММО*, 30:159–241, 1974.
- [4] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их приложения*. Наука, М., 1984.
- [5] Р. Том. Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий. In *Расслоенные пространства и их приложения*, pages 293 – 351. ИЛ, М., 1958.
- [6] Р. Пале. *Семинар по теореме Атья-Зингера об индексе*. "Мир Москва, 1970.
- [7] М. Хирш. *Дифференциальная топология*. Мир, М., 1979.
- [8] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: I. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):484–530, 1968.
- [9] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: II. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):531–545, 1968.

- [10] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators: III. *Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3):546–604, 1968.
- [11] M.F. Atiyah. Global theory of elliptic operators. *Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo 1969)*. Tokyo, Univ. Tokyo Press, pages 21–30, 1970.