

Вопросы по курсу «Аналитическая геометрия»

мехмат МГУ, осень 2025, лектор доцент Д.В. Талалаев

1. Эквивалентность фокального определения и аналитического задания эллипса и гиперболы
2. Эллипс, гипербола и парабола, как конические сечения
3. Директориальное свойство параболы, эллипса и гиперболы.
4. Оптическое свойство эллипса и параболы
5. Векторы на плоскости и в пространстве: закрепленные, свободные. Операции, свойства операций. Векторное пространство R^n , операции, геометрический смысл для $n=2,3$
6. Линейная зависимость и независимость, лемма о выражении одного из векторов в линейно зависимой системе, лемма о зависимости системы при зависимости подсистемы, Линейная зависимость в размерности 2 и 3, базис пространства в размерности 2 и 3, Система координат в векторном пространстве
7. Аффинное пространство, репер, аффинные системы координат. Связь аффинных координат и координат векторов. Деление отрезка в отношении, выражение в координатах
8. Скалярное произведение, определение, абстрактные свойства, однозначность функции с такими свойствами. Выражение в произвольном базисе, матрица Грама, Ортонормированный базис. Координаты вектора в ортонормированном базисе.
9. Ориентированная площадь, абстрактные свойства. Геометрическая интерпретация знака ориентации
10. Ориентация тройки векторов. Лемма о непрерывной деформации положительно ориентированной тройки в базис. Изменение ориентации при транспозиции любой пары векторов.
11. Ориентированный объем. Определение и свойства. Векторное произведение, определение, свойства. Вычисление векторного произведения в стандартном базисе.
12. Смешанное произведение, совпадение с ориентированным объемом. Кососимметричность и линейность смешанного произведения. Свойства векторного произведения (линейность и кососимметричность). Выражение векторного произведения в координатах.
13. Теорема о совпадении ориентированного объема и определителя матрицы.
14. Тождество БАЦ-ЦАБ и тождество Якоби для векторного произведения
15. Эквивалентность трех способов задания прямой на плоскости. Условие параллельности вектора и прямой, лемма о двух уравнениях, задающих одну прямую.
16. Полуплоскости. Теорема о взаимном расположении двух прямых
17. Пучки прямых. Теорема о всех прямых из пучка.
18. Прямая в ортогональных координатах: вектор нормали, расстояние от точки до прямой, угол между прямыми
19. Уравнение плоскости в пространстве. Эквивалентность двух способов задания, условие параллельности вектора плоскости, лемма об уравнениях, задающих одну плоскость.
20. Теорема о взаимном расположении двух плоскостей
21. Пучки и связки плоскостей. Теоремы об описании всех плоскостей из пучка или связки.

22. Расстояние от точки до плоскости в прямоугольной системе координат.
23. Способы задания прямой в пространстве, доказательство эквивалентности. Формула для направляющего вектора в произвольной системе координат).
24. Формула расстояния между скрещивающимися прямыми.
25. Аффинные замены координат: матрица замены, ортогональные замены координат
26. Каноническое уравнение кривой второго порядка: преобразование матриц при заменах координат. Лемма о том, что при заменах координат уравнение второго порядка остается уравнением второго порядка
27. Теорема о приведении к каноническому виду с помощью поворота и с помощью собственных векторов.
28. Ортогональные инварианты. Определение, доказательство инвариантности, поведение инвариантов при умножении уравнения на число.
29. Полуинвариант, инвариантность при однородных заменах, инвариантность для кривых специального типа
30. Определение типа кривой по инвариантам и полуинварианту: грубое деление на три типа по инвариантам, теорема об определении типа кривой.
31. Теорема о том, что через 5 точек общего положения проходит единственная квадрика
32. Распадающиеся кривые: теорема о делении без остатка. Теорема о совпадении двух содержательных квадрик.
33. Теорема Паскаля, Теорема Паппа. Восстановление кривой по 5-и точкам с помощью линейки
34. Взаимное расположение кривой второго порядка и прямой, определение асимптотического направления, теорема о пересечении кривой и прямой асимптотического и не асимптотического направлений. Теорема о количестве асимптотических направлений для кривых эллиптического, гиперболического и параболического типа.
35. Уравнение касательной к кривой второго порядка. Теорема об уравнении диаметра, сопряженного направлению.
36. Определение центра. Теорема о центре. Теорема о количестве центров.
37. Сопряженные диаметры и сопряженные направления. Сопряженные диаметры параболы. Главные диаметры. Теорема о главных диаметрах и осях симметрии.
38. Поляра и теорема Брианшона.
39. Аффинная классификация кривых второго порядка.
40. Поверхности второго порядка и их первые свойства, эллипсоид и его сечения, однополостный гиперболоид и его прямолинейные образующие.
41. Гиперболический параболоид. Теорема о прямолинейных образующих.
42. Общее уравнение поверхности второго порядка, задание матрицей. Лемма о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
43. Лемма о грубой классификации поверхностей второго порядка (5 типов). Теорема о тонкой классификации (17 типов, без доказательства).
44. Ортогональные инварианты поверхностей второго порядка. Полуинварианты (без доказательства).
45. Теорема о пересечении прямой с поверхностью второго порядка. Касательные и диаметральные плоскости.
46. Центр поверхности второго порядка, теорема о совпадении геометрического и алгебраического центра. Условие единственности центра.
47. Главные диаметры и плоскости симметрии.

48. Аффинные преобразования: геометрическое определение и первые свойства. Теорема о представлении аффинных преобразований матрицами.
49. Преобразование матрицы аффинного преобразования при заменах координат. Действие аффинного преобразования на векторах.
50. Изометрические преобразования, определение и первые свойства. Матрица изометрического преобразования.
51. Теорема Шаля для плоскости и для трехмерного пространства.
52. Проективная прямая, три модели, их эквивалентность.
53. Двойное отношение, определения в однородных и аффинных координатах, доказательство эквивалентности, независимость от выбора координат.
54. Проективная плоскость. Модель пополненной плоскости, модель связки и арифметическая модель. Аксиомы инцидентности прямых и точек на проективной плоскости.
55. Проективные преобразования прямой. Существование и единственность преобразования прямой, переводящего три заданные точки в три заданные.
56. Проективные преобразования плоскости. Существование проективного преобразования, переводящего заданную прямую в несобственную.
57. Принцип двойственности на проективной плоскости. Теорема Дезарга.

Литература:

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. «Лекции по аналитической геометрии», 2016