

Список вопросов

22 декабря 2024 г. 7:10

1. Элементарные свойства кривых второго порядка: фокальное свойство, конические сечения, аналитическое задание коник, директориальное свойство.
2. Элементарные свойства коник: оптическое свойство эллипса, параболы; уравнение коник в полярной системе координат.
3. Векторы: операции с векторами на плоскости и в пространстве; аксиомы векторного пространства, линейная зависимость, базис векторного пространства, система координат.
4. Аффинное пространство \mathbb{R}^n , аффинные системы координат, связь аффинных координат и координат векторов, деление отрезка в заданном отношении.
5. Линейные функции от вектора. Скалярное произведение: определение, абстрактные свойства, выражение в произвольном базисе, матрица Грама, ортонормированный базис. Координаты вектора в ортонормированном базисе, определитель матрицы Грама и объем(площадь), изменение матрицы Грама при замене базиса.
6. Ориентированная площадь и ориентированный объем: ориентация базиса, непрерывные семейства базисов, выражение площади и объема через определитель. Абстрактные полилинейные свойства ориентированных площади и объема.
7. Векторное произведение. Смешанное произведение, доказательство совпадения с ориентированным объемом. Абстрактные свойства векторного произведения. Формула векторного произведения в ортонормированном базисе.
8. Алгебры Ли. Определение, биекция \mathbb{R}^3 в алгебру Ли $so(3)$, доказательство тождество Якоби векторного произведения, "bac-cab".
9. Прямые и плоскости в пространстве: параметрическое задание и общее уравнение прямой и плоскости; леммы о том, когда разные задания отвечают одной и той же прямой или плоскости.
10. Прямые и плоскости: условие параллельности вектора и прямой, полуплоскости, формула для направляющего вектора прямой в пространстве в произвольной системе координат.
11. Пучки прямых: условие параллельности и пересечения прямых, теорема о всех прямых из пучка. Теорема о том, что две различные прямые содержатся в одном единственном общем пучке. Пучки плоскостей, связки плоскостей: теорема о всех плоскостях пучка, связки; необходимое и достаточное условия принадлежности четырех плоскостей одной связке.
12. Метрические задачи на прямые и плоскости в ортогональной системе координат: вектор нормали, угол между прямыми, расстояние от точки до плоскости, расстояние между скрещивающимися прямыми.
13. Задачи аффинной и ортогональной классификации: определение, классификация пар прямых на плоскости, в пространстве и 4-х мерном пространстве, классификация троек прямых на плоскости. Ортогональная классификация и инварианты.
14. Аффинные замены координат: Матрица замены, формула замены координат; композиция замен координат. Ортогональные замены координат, ортогональные матрицы, описание $O(2)$ для $n=2$.
15. Ортогональные матрицы при $n=3$, углы Эйлера, отображение Кэли.
16. Алгебраические уравнения при аффинных заменах координат: инвариантность степени уравнения при аффинных заменах, общий вид уравнения кривой второго порядка.
17. Каноническое уравнение кривой второго порядка: теорема о приведении к каноническому виду с помощью перехода к собственному базису.
18. Ортогональные инварианты кривых второго порядка: определение, доказательство инвариантности I_1, I_2, I_3 , поведение инвариантов при умножении уравнения на число, полуинвариант.
19. Постановка задачи классификации кривых второго порядка. Связь с геометрической классификацией для кривых с более чем одной точкой.
20. Определение типа кривой по инвариантам и полуинварианту.
21. Взаимное расположение кривой второго порядка и прямой: асимптотические направления, теорема о возможном пересечении прямой и кривой второго порядка.

22. Особые точки, уравнение касательной прямой. Формула в частных производных, доказательство эквивалентности определения через кратную точку.
23. Линейные системы квадрик: теорема о том, что через 5 точек общего положения проходит единственная квадрика; распадающиеся кривые, классификация геометрических квадрик, то есть ГМТ содержательных квадрик.
24. Теорема Паскаля, Паппа.
25. Поляра, теорема Бриансона. Двойственная квадрика.
26. Диаметры: определение, уравнение; главные диаметры и оси симметрии, лемма о том, что собственные векторы задают главные диаметры.
27. Центры: центр уравнения, принадлежность центра уравнения диаметрам, теорема о совпадении геометрических и центров уравнений для содержательных кривых, описание множества центров.
28. Аффинная классификация кривых второго порядка.
29. Поверхности второго порядка и их первые свойства: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, конус, параболоиды: сечения, прямолинейные образующие.
30. Общее уравнение поверхности второго порядка, лемма о приведении квадратичной формы в размерности 3 к каноническому виду.
31. Теорема о приведении уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Ортогональные инварианты и полуинварианты. Определение грубого типа поверхностей по инвариантам, теорема ортогональной классификации.
32. Пересечение поверхностей с прямыми: теорема о пересечении прямой (не)асимптотического направления с поверхностью, особые точки, касательные плоскости, пересечение поверхности с касательной плоскостью.
33. Диаметральная плоскость: лемма о наличии трех линейно независимых неасимптотических направлений для любой поверхности. Центр поверхности, условие единственности центра, главные направления и плоскости симметрии.
34. Сечение поверхности второго порядка плоскостью: степень сечения, лемма о том, что две поверхности имеющие одинаковые сечения отличаются на уравнение распадающейся поверхности, инварианты пересечения (I_1, I_2).
35. Аффинные преобразования: определение через геометрические свойства, представление в координатах, определение через две аффинные системы координат, преобразование матрицы аффинного преобразования при заменах координат. Действие аффинного преобразования на векторах, произведение матриц при композиции аффинных преобразований.
36. Изометрические преобразования: критерии изометричности.
37. Изометрии плоскости и Теорема Шаля
38. Классификация изометрий трехмерного пространства, замечания об изометриях из $SO(3)$.
39. Кватернионы: вещественные, мнимые кватернионы, длина, сопряженный и обратный кватернион; изоморфизм группы единичных кватернионов и $SU(2)$; действие единичных кватернионов на чисто мнимых кватернионах, гомоморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3)$, сюръективность.
40. Кривые и поверхности второго порядка при аффинных преобразованиях: инвариантные свойства, классификация кривых второго порядка с точностью до аффинных преобразований, теорема о представлении любого аффинного преобразования в виде композиции движения и преобразования растяжения-сжатия.
41. Проективная прямая: модель пополненной прямой, арифметическая модель, модель пучка, однородные координаты и аффинные карты.
42. Двойное отношение: теорема о независимости двойного отношения от однородных координат; проективные преобразования прямой, выражение в координатах, лемма о единственности проективного преобразования, переводящего три точки в три точки.
43. Проективная плоскость: модель пополненной плоскости, множество пучков на аффинной плоскости, несобственная прямая, свойства прямых и точек на проективной плоскости; модель связки, однородные координаты, аффинные карты, уравнение проективной прямой на проективной плоскости, принцип двойственности, двойственное утверждение для теоремы Дезарга.
44. Преобразования прямой и дробно-линейные преобразования, совпадение с $PGL(2, R)$; неподвижные точки проективного преобразования прямой: эллиптический, гиперболический и параболический случаи.
45. Проективные преобразования проективной плоскости: геометрическое определение;

проективные преобразования, индуцированные аффинными преобразованиями трехмерного пространства, представление проективных преобразований в однородных координатах; теорема о том, что проективное преобразование однозначно задается образами 4-х точек, никакие три из которых не лежат на одной проективной прямой.

46. Определение $PGL(3)$, представление проективных преобразований в аффинных координатах, существование проективного преобразования переводящего заданную прямую в несобственную, доказательство теоремы Дезарга и того, что четырехвершинник определяет гармоническую четверку.
47. Кривые второго порядка на проективной плоскости: понятие кривой второго порядка, теорема о приведении к каноническому виду, уравнение касательной прямой к кривой второго порядка на проективной плоскости; асимптоты кривой второго порядка, как касательные в бесконечно-удаленной точке; рациональная параметризация овалов и коника Веронезе.
48. Понятие многообразия Грассмана $G(2,4)$: параметризации матрицами и карты многообразия $G(2,4)$, координаты Плюккера, отображение Плюккера в $P(5)$, квадрика Плюккера, биективность отображения Плюккера.
49. Гиперболические повороты, гиперболическая длина дуги, выражение через двойное отношение, псевдоевклидово скалярное произведение, связь гиперболической длины с псевдо-евклидовым скалярным произведением.
50. Плоскость Лобачевского на гиперболоиде в пространстве Минковского: геодезические (прямые), свойства прямых и точек, абсолют; модель Клейна и неравенство треугольника.
51. Модель Пуанкаре: лемма о том, что геодезические переходят в дуги окружностей, перпендикулярные абсолюту. Псевдоевклидово произведение и его ограничение на касательные плоскости к гиперболоиду. набросок доказательства совпадении углов на гиперболоиде и в модели Пуанкаре.
52. Сферическая геометрия: стереографическая проекция, доказательство сохранения углов при стереографической проекции, сферические теоремы синусов и косинусов, площадь и угловой дефект, с помощью двуугольников.
53. Геометрия Лобачевского: аналог векторного произведения, теоремы синусов и косинусов, угловой дефект с помощью бесконечного измельчения.
54. Движения плоскости Лобачевского: группа изометрий L^2 , группа $O_+(1,2)$, группа $PO_+(1,2)$. Изоморфизмы перечисленных групп.