

Отделение фундаментальной математики и математической физики
Программа курса «Геометрия-1»
мехмат МГУ, осень 2023.
лектор проф. Д.В. Миллионщиков

1. Векторы и операции над ними. Свойства операций.
Линейная зависимость и независимость векторов. Коллинеарность и компланарность векторов. Лемма о линейно зависимой системе векторов. Лемма о линейно зависимой подсистеме.
2. Лемма о геометрической интерпретации линейной зависимости.
Базис векторов на плоскости и в пространстве. Теорема о базисе.
3. Координаты вектора относительно базиса. Лемма о свойстве координат вектора. Аффинная система координат. Координатный репер. Радиус-вектор точки. Формулы для координат точки, делящей направленный отрезок в заданном отношении.
4. Центр масс, корректность определения и его свойства.
5. Скалярное произведение и теорема о его свойствах. Формулы для скалярного произведения в ортогональной системе координат.
6. Ориентированная площадь параллелограмма и ее свойства.
7. Замена аффинной системы координат на плоскости. Теорема о формулах аффинной замены системы координат.
8. Отношение эквивалентности (одинаковая ориентированность) на множестве базисов плоскости.
9. Ориентация плоскости и ориентация пространства.
10. Ориентированный объем параллелепипеда.
11. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов и его связь с ориентированным объемом.
12. Теорема о свойствах смешанного произведения.
13. Теорема о свойствах векторного произведения.
14. Формула для векторного произведения в ортогональной системе координат. Формулы для двойного векторного произведения.
15. Параметрическое и общее уравнение прямой на плоскости в произвольной аффинной системе координат. Их эквивалентность для выбранной прямой.
16. Теорема единственности для общего уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (связь с уравнениями).
17. Пучок прямых на плоскости: собственный и несобственный. Первая теорема о пучке прямых (пучок уравнений).
18. Вторая теорема о пучке прямых на плоскости (через определитель третьего порядка).
19. Положительная и отрицательная полуплоскости, определенные уравнением прямой. Вектор нормали к прямой заданной общим уравнением в ортогональной системе координат. Формула для расстояния от точки до прямой на плоскости в ортогональной системе координат.
20. Плоскости в пространстве. Общее и параметрическое уравнения плоскости.
21. Теорема единственности для уравнения плоскости.

22. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Пучок плоскостей. Теорема о пучке плоскостей. Связка плоскостей. Теорема о связке плоскостей.
23. Фокальное свойство эллипса. Эксцентриситет эллипса. Директориальное свойство эллипса.
24. Эллипс и гипербола как конические сечения (шары Данделена).
25. Парабола как геометрическое место точек (фокус и директриса). Парабола как коническое сечение (директриса и шар Данделена).
26. Фокальное свойство гиперболы. Эксцентриситет гиперболы. Директориальное свойство гиперболы.
27. Уравнения эллипса, гиперболы (правая ветвь), параболы в полярной системе координат.
28. Ортогональные замены координат на плоскости. Ортогональные матрицы. Классификация ортогональных матриц второго порядка.
29. Уравнения второго порядка на плоскости и понятие квадратики. Лемма о повороте ортогональной системы координат, приводящем квадратичную форму уравнения второго порядка на плоскости к диагональному виду.
30. Матричная форма записи уравнения второго порядка и закон изменения матрицы квадратичной формы при аффинной замене координат.
31. Ортогональные инварианты уравнения второго порядка на плоскости. Характеристический многочлен уравнения второго порядка.
32. Теорема о существовании канонической системы координат и канонических уравнений для плоских квадрик.
33. Ортогональный полуинвариант, его свойства и применение.
34. Определения вида кривой второго порядка по ее ортогональным инвариантам.
35. Распадающаяся кривая второго порядка и теорема об уравнении кривой второго порядка, содержащей прямую.
36. Центр кривой второго порядка и центр симметрии. Теорема о центре кривой второго порядка. Классификации кривых второго порядка по числу центров симметрии.
37. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Диаметр кривой второго порядка, вывод его уравнения. Особые направления.
38. Особые точки кривой второго порядка. Касательная к кривой второго порядка в неособой точке. Матричная запись уравнения касательной.
39. Поляра и полюс. Определение и свойства.
40. Диаметры и центр симметрии. Теорема о диаметрах кривой второго порядка с единственным центром. Сопряженные направления и диаметры. Особые направления.
41. Главные диаметры кривой второго порядка.
42. Главные направления и собственные векторы матрицы квадратичной формы.
43. Теоремы единственности для кривых второго порядка.
44. Теорема Паскаля.

45. Теорема Брианшона.
46. Ортогональные матрицы третьего порядка и углы Эйлера.
47. Кватернионы и параметризация Кэли-Клейна группы $SO(3)$.
48. Уравнение второго порядка в пространстве. Приведение квадратичной формы к главным осям.
49. Теорема о существовании канонической системы координат и канонических уравнений для пространственных квадрик.
50. Уравнения и графики: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды и конус. Цилиндрические поверхности.
51. Классификация канонических уравнений поверхностей второго порядка.
52. Группа преобразований (биекций) множества. Группа аффинных преобразований плоскости (пространства). Основные свойства аффинных преобразований. Преобразование подобия.
53. Аналитическая запись аффинного преобразования.
54. Эрлангенская программа Клейна. Группы изометрий (движений) плоскости и пространства.
55. * Группа симплектических преобразований плоскости. Группа гиперболических поворотов плоскости и группа Лоренца.
56. Теорема Шаля для плоскости.
57. * Теорема Шаля в пространстве.
58. Пересечение прямой с поверхностью второго порядка.
59. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью.
60. * Элементы геометрии Лобачевского: псевдосфера и ее стереографическая проекция.
61. Теорема о прямолинейных образующих гиперболического параболоида.
62. Теорема о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.
63. Особые точки поверхностей второго порядка. Касательные прямые и касательная плоскость к поверхности второго порядка.
64. Проективная прямая. Двойное отношение. Гармонические четверки.
65. Три модели проективной плоскости. Бесконечно удаленные точки.
66. Прямые на проективной плоскости. Понятие инцидентности. Примеры двойственных утверждений.
67. Связь однородных координат модели связки с координатами в аффинной карте.
68. Теорема Дезарга.
69. Кривые второго порядка на проективной плоскости.
70. Группа проективных преобразований.
71. Аффинная классификация непустых кривых второго порядка.
72. Проективная классификация непустых кривых второго порядка.
73. Аффинная классификация непустых поверхностей второго порядка.

Литература:

Федорчук В.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
Издательство МГУ, 1990.

Веселов А.П., Троицкий Е.В.«Лекции по аналитической геометрии», 2016.