Конспект курса «Аналитическая геометрия»
лектор — проф. И.А.Дынников

Программа курса

1. Геометрическое определение эллипса, параболы и гиперболы. Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения. Оптическое свойство коник

Определение 1.1 (Геометрическое определение эллипса)**.** *Эллипсом* называется геометрическое место точек M плоскости, сумма расстояний от которых до некоторых двух фиксированных (не обязательно различных) точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами* этого эллипса) постоянна и превышает расстояние между F_1 и F_2:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a = \mathrm{const} > |F_1F_2|.$$

Определение 1.2 (Геометрическое определение параболы)**.** *Параболой* называется геометрическое место точек M плоскости, расстояние от которых до некоторой фиксированной точки F (называемой *фокусом* этой параболы) равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой d (называемой *директрисой* этой параболы), не проходящей через точку F:

$$|MF| = |MH|, \text{ где } H \in d,\ MH \perp d.$$

Определение 1.3 (Геометрическое определение гиперболы)**.** *Гиперболой* называется геометрическое место точек M плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до некоторых двух фиксированных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами* этой гиперболы) постоянна и лежит в интервале $(0, |F_1F_2|)$:

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a = \mathrm{const} \in (0, |F_1F_2|).$$

Контрольный вопрос 1.1. Корректно ли определены фокусы у эллипса, гиперболы и параболы, а также директриса у параболы?

Определение 1.4. *Круговым конусом* называется объединение всех прямых в пространстве (называемых *образующими* этого конуса), образующих некоторый фиксированный угол $\alpha \in (0, \pi/2)$ с некоторой фиксированной прямой ℓ (называемой *осью* данного конуса) и проходящих через некоторую фиксированную точку $O \in \ell$ (называемой *вершиной* этого конуса).

Теорема 1.1. *Любое сечение любого кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, является эллипсом, гиперболой или параболой.*

Любой эллипс, любую гиперболу или параболу можно получить как сечение некоторого кругового конуса, причем в случае эллипса и параболы — с любым наперед заданным углом между осью и образующими.

Схема доказательства. Использовать сферы Данделена. □

По причине, понятной из теоремы 1.1, эллипсы, параболы и гиперболы обобщенно называются *кониками.*

Теорема 1.2 (Оптическое свойство коник)**.** *Касательная к эллипсу с фокусами F_1, F_2 в любой его точке M перпендикулярна биссектрисе угла $\angle F_1MF_2$.*

Касательная к гиперболе с фокусами F_1, F_2 в любой ее точке M является биссектрисой угла $\angle F_1MF_2$.

Касательная к параболе с фокусом F и директрисой d в любой ее точке M является биссектрисой угла $\angle FMH$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую d.

Схема доказательства. Физические соображения. □

Контрольный вопрос 1.2. Почему свойства коник, указанные в теореме 1.2, называют оптическими?

2. Аналитические определения эллипса, параболы и гиперболы. Их совпадение с геометрическими определениями. Уравнение асимптот гиперболы

Определение 2.1 (Аналитическое определение эллипса)**.** *Эллипсом* называется кривая (множество точек) на плоскости, которая в некоторой декартовой системе координат x, y задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где a и b — некоторые положительные числа, причем $a \geqslant b$. Числа a и b называются *длинами*, соответственно, *большой* и *малой полуосей* данного эллипса.

Определение 2.2 (Аналитическое определение параболы)**.** *Параболой* называется кривая на плоскости, которая в некоторой декартовой системе координат x, y задается уравнением

$$y^2 = 2px, \tag{2}$$

где p — некоторое положительное число (называемое *параметром* данной параболы).

Ось Ox этой системы координат называется *осью* данной параболы.

Определение 2.3 (Аналитическое определение гиперболы)**.** *Гиперболой* называется кривая на плоскости, которая в некоторой декартовой системе координат x, y задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

где a и b — некоторые положительные числа.

Числа a и b называются *длинами*, соответственно, *действительной* и *мнимой полуосей* данной гиперболы. Прямые, задаваемые в этой системе координат уравнениями

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

называются *асимптотами* данной гиперболы.

Контрольный вопрос 2.1. Корректно ли определены длины полуосей эллипса и гиперболы, параметр и ось параболы, асимптоты гиперболы?

Контрольный вопрос 2.2. Каков точный смысл выражения «кривая задается уравнением»?

Контрольный вопрос 2.3. Придать точный смысл следующему высказыванию: при удалении от начала координат гипербола прижимается к асимптотам.

Определение 2.4. Декартова система координат, в которой коника задается одним из уравнений (1), (2) или (3) (с соответствующими ограничениями на параметры) называется *канонической.*

Контрольный вопрос 2.4. Сколько различных канонических систем координат имеет коника в зависимости от ее вида?

Теорема 2.1. *Определения коник 2.1, 2.2 и 2.3 эквивалентны, соответственно, определениям 1.1, 1.2 и 1.3.*

Схема доказательства. 1. Случай эллипса.
Выберем систему координат так, чтобы точки F_1 и F_2 имели координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно, где $2c = |F_1F_2|$ (эта величина называется *фокусным расстоянием* данного эллипса. С помощью алгебраических преобразований убедимся в равносильности уравнения

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{4}$$

и уравнения (1), в котором $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

2. Случай параболы.
Выберем систему координат так, чтобы фокус F имел координаты $(p/2, 0)$, а директриса задавалась уравнением $x = -p/2$. С помощью алгебраических преобразований установим равносильность уравнений (2) и

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{5}$$

3. Случай гиперболы.
Выберем систему координат так, чтобы точки F_1 и F_2 имели координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ соответственно, где $2c = |F_1F_2|$ (эта величина называется *фокусным расстоянием* данной гиперболы). С помощью алгебраических преобразований убедимся в равносильности уравнения

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a. \tag{6}$$

и уравнения (3), в котором $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. □

Контрольный вопрос 2.5. Если, в уравнениях (4) и (6) добавить произвольные коэффициенты перед слагаемыми, то какой степени получится многочлен в уравнении в общем случае после избавления от корней?

3. Полярные координаты. Формулы поворота плоскости на данный угол и симметричного отражения относительно данной прямой

Контрольный вопрос 3.1. Что означает термины «координата» и «система координат»?

Определение 3.1. *Полярная система координат* сопоставляет каждой точке M плоскости расстояние ρ от этой точки до некоторой фиксированной точки O (называемой *началом* данной полярной системы координат) и угол φ поворота в положительном направлении от некоторого фиксированного луча a с началом в точке O (этот луч будет называться *полярной осью* данной полярной системы координат) до направления вектора $\overrightarrow{OM}$. При $M = O$ угол φ не определен (его значение можно выбрать произвольно), а в остальных случаях он определен с точностью до прибавления $2\pi k$, где k — произвольное целое число.

Таким образом, для выбора полярной системы координат нужно зафиксировать на плоскости некоторую точку O, некоторый выходящий из нее луч a и определиться с тем, какое направление вращения считать положительным.

Контрольный вопрос 3.2. Что значит «направление вращения»?

С каждой полярной системой координат ρ, φ свяжем декартову систему координат x, y (и наоборот) по следующему правилу. За начало декартовой системы возьмем начало O полярной, за направление оси Ox — направление полярной оси, а за направление оси Oy — направление, полученное поворотом полярной оси в положительном направлении на угол $\pi/2$. Тогда декартовы и полярные координаты будут связаны формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{7}$$

Контрольный вопрос 3.3. Как выразить, в обратную сторону, ρ и φ через x и y?

Предложение 3.1. *Пусть на плоскости дана декартова система координат x, y с началом в точке O, и пусть точка M' получена из точки M поворотом вокруг точки O на угол α в положительном направлении. Тогда координаты (x, y) и (x', y') точек M и M' связаны следующими соотношениями:*

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{8}$$

Пусть точка M'' симметрична точке M относительно прямой ℓ, полученной из оси Ox поворотом на угол β в положительном направлении. Тогда координаты (x'', y'') точки M'' связаны с координатами точки M формулами

$$x'' = x\cos(2\beta) + y\sin(2\beta), \quad y'' = x\sin(2\beta) - y\cos(2\beta). \tag{9}$$

Схема доказательства. Воспользоваться полярной системой координат, ассоциированной с декартовой системой Oxy. В этой системе поворот на угол α записывается формулой $(\rho,\varphi) \mapsto (\rho, \varphi+\alpha)$, а отражение относительно прямой ℓ — формулой $(\rho,\varphi) \mapsto (\rho, 2\beta-\varphi)$. Далее применить (7) и формулы тригонометрии. □

Формулы (8) и (9) удобно записывать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Контрольный вопрос 3.4. Пусть кривая γ задана уравнением $F(x,y) = 0$, где F — некоторая функция. Написать уравнение, которым задается кривая, получаемая из γ поворотом вокруг начала координат в положительном направлении на угол α.

4. Директориальное свойство коник. Уравнения коник в обобщенных полярных координатах

Теорема 4.1. *Пусть d — произвольная прямая на плоскости, F — не лежащая на ней точка, а e — положительное число. Тогда геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до точки F и до прямой d равно e, является коникой, а именно*:

- *эллипсом при $e < 1$;*
- *параболой при $e = 1$;*
- *гиперболой при $e > 1$.*

Точка F всегда является одним из фокусов этой коники.

При подходящем выборе d, F и e таким образом может быть получена любая коника, кроме окружности.

Схема доказательства. В случае $e = 1$ утверждение следует непосредственно из геометрического определения параболы. Далее будем считать, что $e \neq 1$.

Выберем декартову систему координат $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ с началом в точке F так, чтобы прямая d задавалась уравнением $\widetilde{x} = -s$, где s — расстояние от F до d. Убедимся, что уравнение

$$\sqrt{\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2} = e \cdot |\widetilde{x} + s| \tag{10}$$

равносильно в случае $e < 1$ уравнению (1) после замены

$$x = \widetilde{x} - c, \quad y = \widetilde{y}, \quad a = \frac{es}{1-e^2}, \quad b = \frac{es}{\sqrt{1-e^2}}, \quad c = ae,$$

а в случае $e > 1$ уравнению (3) после замены

$$x = \widetilde{x} + c, \quad y = \widetilde{y}, \quad a = \frac{es}{e^2-1}, \quad b = \frac{es}{\sqrt{e^2-1}}, \quad c = ae. \qquad \square$$

Величина e в теореме 4.1 называется *эксцентриситетом* соответствующей коники, $p = es$ — ее *фокальным параметром*, а прямая, проходящая через фокус и ортогональная прямой d — фокальной осью. Легко убедиться, в случае параболы фокальный параметр совпадает с параметром p в уравнении (2). В случае эллипса и гиперболы он выражается формулой $p = b^2/a$. Во всех трех случаях он равен половине длины *фокальной хорды* — хорды, проходящей через фокус и параллельной директрисе.

Прямая d в теореме 4.1 называется *директрисой* соответствующей коники.

Контрольный вопрос 4.1. Совпадает ли это определение с определением директрисы параболы, данным ранее?

Контрольный вопрос 4.2. Сколько директрис имеют эллипсы и гиперболы?

В случае окружности эксцентриситет e полагается равным нулю, а фокальный параметр p — радиусу окружности. Директрис и фокальных осей у окружностей нет.

Определение 4.1. Пусть на плоскости задана полярная система координат ρ, φ. Тогда ассоциированная с ней *обобщенная полярная система координат* сопоставляет точке с полярными координатами (ρ, φ) либо пару (ρ, φ), либо пару $(-\rho, \varphi + \pi)$.

Легко видеть, что формулы (7) остаются верными в случае обобщенной полярной системы координат.

Теорема 4.2. *Любая коника в некоторой обобщенной полярной системе координат ρ, φ задается уравнением*

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \tag{11}$$

где e — эксцентриситет, а p — фокальный параметр коники. Начало отсчета такой системы находится в фокусе, а полярная ось (в случае, когда коника не является окружностью) является частью фокальной оси, не пересекающей соответствующую данному фокусу директрису.

Схема доказательства. В обобщенной полярной системе координат, ассоциированной с $\widetilde{x}, \widetilde{y}$, уравнение (10) превращается в

$$\pm\rho = e \cdot (\rho\cos\varphi + s).$$

При обоих выборах знака в левой части и подстановке $p = es$ получается кривая (11). □

5. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, репер. Аффинная система координат. Деление отрезка в данном отношении

Определение 5.1. Набор векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (на плоскости или в пространстве) называется *линейно зависимым*, если найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, для которых

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k = 0.$$

Контрольный вопрос 5.1. Что означает это определение в случаях $k = 1, 2, 3$?

Определение 5.2. *Базисом* на прямой, плоскости или в пространстве называется упорядоченный линейно независимый набор, соответственно, из одного, двух или трех векторов.

Определение 5.3. Пусть на прямой, плоскости или в пространстве дан базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. *Координатами* произвольного вектора $\boldsymbol{v}$ в этом базисе называются числа $v_1, \ldots, v_k$, для которых $\boldsymbol{v} = \sum_i v_i\boldsymbol{e}_i$.

Теорема 5.1. *Каждый вектор в любом базисе имеет однозначно определенные координаты.*

Схема доказательства. Построение параллелограммов и параллелепипедов. □

Определение 5.4. Набор $(O, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$, состоящий из некоторой точки (прямой, плоскости или пространства) и векторов некоторого базиса, называется *репером.*

Определение 5.5 (Аффинная система координат)**.** Пусть $(O, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$ — некоторый репер на прямой, плоскости или в пространстве (соответственно, $k = 1$, 2 или 3). *Аффинными координатами* произвольной точки M в этом репере называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.

Предложение 5.2. *Пусть $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$ — аффинные координаты точек A и B соответственно в аффинной системе координат, связанной с некоторым репером $(O, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(y_1 - x_1, \ldots, y_k - x_k)$.*

Схема доказательства. Получается из определений простой подстановкой. □

Определение 5.6. Пусть A и B — различные точки (на прямой, плоскости или в пространстве), а λ и μ — вещественные числа, не равные нулю одновременно. Говорят, что точка M *делит отрезок AB в отношении* $\lambda : \mu$, если имеет место равенство векторов

$$\mu \cdot \overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Если $\mu \neq 0$, то для краткости вместо «в отношении $\lambda : \mu$» говорят «в отношении ν», где $\nu = \lambda/\mu$, а в случае $\mu = 0$ — «в отношении ∞».

Контрольный вопрос 5.2. В каком отношении нельзя разделить никакой отрезок?

Теорема 5.3. *Пусть точка M делит отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$, а x — одна из координат некоторой аффинной системы координат. Тогда*

$$x(M) = \frac{\mu\, x(A) + \lambda\, x(B)}{\lambda + \mu}. \tag{12}$$

Схема доказательства. Прямое вычисление с использованием связи координат произвольного вектора и аффинных координат его начала и конца. □

Контрольный вопрос 5.3. Любая ли функция x со свойством (12), входит в качестве одной из координат в какую-нибудь аффинную систему координат?

Контрольный вопрос 5.4. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — набор точек на прямой, плоскости или в пространстве, представленных своими аффинными координатами в некотором фиксированном репере, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — набор действительных чисел, такой что:

(а) $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0$ или
(б) $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$.

Каков геометрический смысл выражения $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k$ в каждом из этих случаев? Что означает «геометрический смысл»?

Контрольный вопрос 5.5. Отождествим плоскость с *комплексной прямой* $\mathbb{C}$ (то есть вместо двух вещественных декартовых координат x, y будем использовать одну комплексную координату $x + \mathrm{i}\, y$). Пусть точка M делит отрезок AB в том же отношении λ, что точка M' делит отрезок $A'B'$, причем $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Что это означает геометрически?

6. Линейные функции. Скалярное произведение и его свойства. Формула для скалярного произведения в аффинной системе координат. Прямоугольные системы координат

Определение 6.1. Функция f векторного аргумента называется *линейной*, если для любых двух векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ и числа λ выполнены равенства:

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}), \quad f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u}). \tag{13}$$

Первое из этих свойств называется *аддитивностью*, а второе — *однородностью первой степени.*

Теорема 6.1. *Пусть на плоскости или в пространстве зафиксирован базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ ($k = 2$ или 3). Координаты вектора $\boldsymbol{v}$ в этом базисе будем обозначать через $v_1, \ldots, v_k$. Любая линейная функция f тогда имеет вид*

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i, \tag{14}$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — некоторые коэффициенты, однозначно определяемые функцией f. Наоборот, любая такая функция линейна.

Схема доказательства. Взять за коэффициенты a_i значения f на базисных векторах. □

Определение 6.2. *Скалярным произведением* двух векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ называется число

$$|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\angle\boldsymbol{uv}.$$

Оно обозначается через $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ или просто $\boldsymbol{uv}$.

Теорема 6.2 (Свойства скалярного произведения)**.** *Скалярное произведение как функция от двух векторов обладает следующими свойствами.*

1) Билинейность*, то есть линейность по каждому из аргументов. Это значит, что для любых векторов* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ *и числа* λ *имеют место равенства*

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \quad (\lambda\cdot\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \lambda\cdot(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \quad (\boldsymbol{u}, \lambda\cdot\boldsymbol{v}) = \lambda\cdot(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

2) Симметричность*. Это значит, что для любых векторов* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *выполнено*

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$$

3) Положительная определенность*. Это значит, что для любого ненулевого вектора* $\boldsymbol{u}$ *имеет место неравенство*

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0.$$

Схема доказательства. Симметричность, положительная определенность и однородность первой степени следуют сразу из определения. Для проверки аддитивности по первому аргументу нужно рассмотреть проекцию на направление второго аргумента. □

Теорема 6.3. *Пусть* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ *— некоторый базис на плоскости или в пространстве* ($k = 2$ *или* 3)*, а* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *— произвольные вектор. Обозначим их координаты в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ *через* $(u_1, \ldots, u_k)$ *и* $(v_1, \ldots, v_k)$ *соответственно. Тогда*

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j). \tag{15}$$

Схема доказательства. Воспользоваться билинейностью скалярного произведения. □

Определение 6.3. Базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ называется *ортонормированным*, если

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аффинная система координат, ассоциированная с ортонормированным базисом, называется *прямоугольной* (или *ортогональной*).

В случае прямоугольной системы координат формула (15) превращается в

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i. \tag{16}$$

Теорема 6.4. *Всякая линейная функция* f *от вектора плоскости или пространства имеет вид* $(\boldsymbol{u}, \cdot)$*, где* $\boldsymbol{u}$ *— некоторый вектор, причем такой вектор единственный.*

Схема доказательства. Воспользоваться общим видом линейной функции (14) и равенством (16). □

7. Матрица Грама. Выражение площади параллелограмма и объема параллелепипеда через скалярные произведения порождающих их векторов

Определение 7.1. *Матрицей Грама* произвольного набора векторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$, $k \in \mathbb{N}$, называется матрица размера $k \times k$, на ij-м месте в которой стоит число $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$.

Матрица Грама набора $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ будет обозначаться через $G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$.

Теорема 7.1. *Для любых двух векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ определитель матрицы Грама $G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ равен квадрату площади параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.*

Для любых трех векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ определитель матрицы Грама $G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ равен квадрату объема параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Схема доказательства. Для параллелограмма используем формулу площади через синус угла между $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. В случае параллелепипеда обозначаем через $\boldsymbol{h}$ ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{v}_3$ относительно плоскости векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ и показываем, что $\det G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{h}) = \det G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Далее вычисляем объем как произведение высоты $|\boldsymbol{h}|$ на площадь основания $\sqrt{\det G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}$. □

Следствие 7.2. *Определитель матрицы Грама линейно независимого набора векторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$, $k = 2, 3$, всегда положителен.*

Контрольный вопрос 7.1. Какие матрицы размера 2×2 и 3×3 могут быть матрицами Грама некоторого набора векторов?

Контрольный вопрос 7.2. Пусть координаты векторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ в некотором ортонормированном базисе записаны по столбцам матрицы X. Как выразить через X матрицу Грама $G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$?

8. Матрица перехода между базисами. Геометрический смысл ее определителя. Ориентация плоскости и пространства

Определение 8.1. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_k$ — два базиса на плоскости или в пространстве ($k = 2$ или 3). *Матрицей перехода* от первого из этих базисов ко второму называется матрица размера $k \times k$, в которой на ij-м месте стоит i-я координата вектора f_j в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$.

В матричном виде данное определение записывается так:

$$\big(\boldsymbol{f}_1 \dots \boldsymbol{f}_k\big) = \big(\boldsymbol{e}_1 \dots \boldsymbol{e}_k\big)\, C, \tag{17}$$

где C — матрица перехода.

Предложение 8.1. *Пусть C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_k$, а D — матрица перехода от $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_k$ к $\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_k$. Тогда матрицей перехода от $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ к $\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_k$ является матрица CD, а матрица перехода от $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_k$ к $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ обратна к C.*

Схема доказательства. Использовать запись (17) и ассоциативность умножения матриц. □

Контрольный вопрос 8.1. Какие матрицы могут быть матрицами перехода между базисами? Изменится ли ответ, если один из базисов зафиксировать?

Площадь параллелограмма (или параллелепипеда), натянутого на пару векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (соответственно, на тройку векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$), будем обозначать через $S(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ (соответственно, через $V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$).

Теорема 8.2 (Геометрический смысл определителя матрицы перехода)**.** *Пусть C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ на плоскости. Тогда*

$$|\det C| = \frac{S(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)}{S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}.$$

Аналогично, если C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ в пространстве, то

$$|\det C| = \frac{V(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)}{V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}.$$

Схема доказательства. Используя предложение 8.1, сведем задачу к случаю, когда C есть матрица элементарного преобразования. □

Определение 8.2. Два базиса на плоскости или в пространстве называются *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы перехода от одного к другому положителен.

Контрольный вопрос 8.2. Является ли свойство быть одинаково ориентированными отношением эквивалентности?

Определение 8.3. Класс одинаково ориентированных базисов плоскости или пространства называется *ориентацией* соответственно плоскости или пространства.

Контрольный вопрос 8.3. Сколько существует ориентаций у плоскости и у пространства?

Контрольный вопрос 8.4. Каков физический смысл ориентации?

9. Ориентированная площадь и ориентированный объем. Их свойства. Совпадение ориентаций базисов как критерий их непрерывной деформируемости друг в друга

Определение 9.1. Пусть на плоскости зафиксирована ориентация. Тогда *ориентированной площадью* параллелограмма, натянутого на произвольные векторы $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, обозначаемой $S_{\text{or}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, называется число, по абсолютной величине равное $S(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ и положительное, если $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ образуют базис выбранной ориентации, и неположительное в противном случае.

Аналогичным образом, пусть зафиксирована ориентация в пространтсве. Тогда *ориентированным объемом* параллелепипеда, натянутого на произвольные векторы $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, обозначаемым $V_{\text{or}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, называется число, по абсолютной величине равное $V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ и положительное, если $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ образуют базис выбранной ориентации, а в противном случае неположительное.

Теорема 9.1. *Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ — два базиса на плоскости с выбранной ориентацией, а C матрица перехода от первого ко второму. Тогда*

$$\det C = \frac{S_{\text{or}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}{S_{\text{or}}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)}.$$

Аналогично, пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ — два базиса в пространстве с выбранной ориентацией, а C матрица перехода от первого ко второму. Тогда

$$\det C = \frac{V_{\text{or}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}{V_{\text{or}}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)}.$$

Схема доказательства. Применить теорему 8.2 и определение одинаковой ориентированности. □

Контрольный вопрос 9.1. Пусть на плоскости фиксирован некоторый базис. Сформулировать необходимое и достаточное условие, при котором для произвольных двух векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, имеющие в этом базисе координаты (a, b) и (c, d) соответственно, ориентированную площадь натянутого на них параллелограмма можно вычислять по формуле $S_{\text{or}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$? Аналогичный вопрос для пространства и трех векторов.

Теорема 9.2 (Свойства ориентированной площади и ориентированного объема)**.** *Ориентированный объем и ориентированная площадь как функции от двух или трех векторов соответственно обладают следующими свойствами*:

- *линейность по каждому из аргументов (билинейность и трилинейность соответственно)*;
- кососимметричность. *Это означает, что имеют место тождества*:

$$S_{\rm or}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -S_{\rm or}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

$$V_{\rm or}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -V_{\rm or}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = -V_{\rm or}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v});$$

- нетривиальность:

$$S_{\rm or}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0 \text{ или } V_{\rm or}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = 0$$

  только тогда, когда векторы $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ *или, соответственно,* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ *линейно зависимы.*

Схема доказательства. Использовать свойства определителя матрицы. □

Контрольный вопрос 9.2. Пусть $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ — некоторый базис в плоскости. Сколько существует кососимметричных билинейных функций f от пары векторов плоскости, для которых $f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = 1$? Аналогичный вопрос для пространства и кососимметричных трилинейных функций.

Контрольный вопрос 9.3. Можно ли определить ориентированную площадь для всех параллелограммов в пространстве так, чтобы имели место аналогичные свойства и получилась функция, совпадающая с обычной площадью с точностью до знака?

Теорема 9.3. *Пусть* $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k$ *и* $\boldsymbol{f}_1,\ldots,\boldsymbol{f}_k$ *— два базиса на плоскости или в пространстве. Тогда следующие два утверждения равносильны*:

- *эти базисы одинаково ориентированы*;
- *существует такое семейство базисов* $\boldsymbol{a}_1(t),\ldots,\boldsymbol{a}_k(t)$*, непрерывно зависящее от параметра* $t \in [0,1]$*, что* $\boldsymbol{a}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$ *и* $\boldsymbol{a}_i(1) = \boldsymbol{f}_i$*,* $i = 1,\ldots,k$*.*

Схема доказательства. Сводим к случаю, когда матрица перехода от одного базиса к другому является матрицей элементарного преобразования. □

10. Векторное и смешанное произведения. Их свойства и формулы для вычисления в прямоугольной положительно ориентированной системе координат. Тождество Якоби

Определение 10.1. Пусть в пространстве выбрана ориентация (называемая положительной). *Векторным произведением* произвольных двух векторов $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ пространства называется вектор, обозначаемый через $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ (или $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$), определяемый следующими свойствами:

- $|[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]| = S(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$;
- $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ ортогонален векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$;
- если $S(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \neq 0$, то базис $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ имеет положительную ориентацию.

Смешанным произведением произвольных трех векторов $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$, обозначаемым через $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ называется число $([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}],\boldsymbol{w})$.

Предложение 10.1. *Имеет место тожество*

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = V_{\rm or}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}). \tag{18}$$

Схема доказательства. Легко следует из определений. □

Следствие 10.2. *Векторное произведение* $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ *можно определить как единственный вектор, удовлетворяющий равенству* (18) *тождественно по* $\boldsymbol{w}$*.*

Следствие 10.3. *В ортогональной положительно ориентированной системе координат* x,y,z *векторное произведение вычисляется по формуле*

$$[(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Если координаты векторов записывать в столбцы, то верна также формула

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 10.4 (Свойства векторного произведения)**.** *Векторное произведение обладает следующими свойствами*:

- *билинейность*;
- *антисимметричность*: $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = -[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]$;
- *тождество Якоби*:

$$[[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}] + [[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}], \boldsymbol{u}] + [[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}] = 0.$$

Схема доказательства. Первые два свойства следуют из аналогичных свойств ориентированного объема.

Для доказательства тождества Якоби отождествим трехмерное пространство с множеством кососимметричных матриц размера 3×3:

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что скалярное произведение и ориентированный объем вычисляются по формулам:

$$(A, B) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB), \quad (A, B, C) = -\operatorname{tr}(ABC) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(ABC - ACB).$$

Отсюда получим, что векторное произведение вычисляется по формуле

$$[A, B] = AB - BA$$

(нужно убедиться, что в правой части тоже кососимметричная матрица!). После этого тождество Якоби получается простой прямой проверкой. □

Пространства (любой размерности) с операцией [,], имеющей указанные в теореме 10.4 свойства, называются *алгебрами Ли*. Трехмерное пространство с векторным умножением является алгеброй Ли, обозначаемой через $\mathfrak{so}(3)$.

11. Ортогональная проекция вектора на вектор. Формулы поворота пространства вокруг данной прямой на данный угол

Предложение 11.1. *Пусть* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *— произвольные векторы (на плоскости или в пространстве), первый из которых ненулевой. Тогда из свойств скалярного произведения следует, что существует единственная пара векторов* $\boldsymbol{v}^{\parallel}$ *и* $\boldsymbol{v}^{\perp}$*, удовлетворяющая условиям*:

- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\parallel} + \boldsymbol{v}^{\perp}$;
- *вектор* $\boldsymbol{v}^{\parallel}$ *коллинеарен вектору* $\boldsymbol{u}$*, а* $\boldsymbol{v}^{\perp}$ *— перпендикулярен.*

Схема доказательства. Положим $\boldsymbol{v}^{\parallel} = \lambda \cdot \boldsymbol{u}$, где λ — неизвестный коэффициент. Из условия $(\boldsymbol{v}^{\perp}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{\parallel}, \boldsymbol{u}) = 0$ найдем

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}.$$ □

Определение 11.1. Вектор $\boldsymbol{v}^{\parallel}$ в предложении 11.1 называется *проекцией* вектора $\boldsymbol{v}$ на вектор $\boldsymbol{u}$, а вектор $\boldsymbol{v}^{\perp}$ — *ортогональной составляющей* $\boldsymbol{v}$ относительно вектора $\boldsymbol{u}$.

Предложение 11.2. *Проекция $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{u}$ задается формулой*

$$\boldsymbol{v}^{\parallel} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\, \boldsymbol{u}.$$

Если записывать векторы как столбцы их координат в некотором фиксированном ортонормированном базисе, то для проекции $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{u}$ верна также формула

$$\boldsymbol{v}^{\parallel} = \frac{1}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} \cdot (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\top})\boldsymbol{v},$$

где '$\top$' обозначает транспонирование.

Схема доказательства. Следует из доказательства предложения 11.1. □

Предложение 11.3. *Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — произвольные векторы пространства с выбранной ориентацией, причем первый из них ненулевой, а α — произвольное число. Тогда вектор $\boldsymbol{w}$, получаемый из $\boldsymbol{v}$ вокруг $\boldsymbol{u}$ поворотом в положительном направлении на угол α равен*

$$\boldsymbol{w} = (1 - \cos\alpha)\, \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}\, \boldsymbol{u} + \cos\alpha\, \boldsymbol{v} + \frac{\sin\alpha}{|\boldsymbol{u}|}\, [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]. \tag{19}$$

Схема доказательства. Разложим вектор $\boldsymbol{v}$ в сумму проекции и ортогональной составляющей относительно $\boldsymbol{u}$ и повернем по отдельности. □

Контрольный вопрос 11.1. Что значит повернуть в положительном направлении?

Контрольный вопрос 11.2. Записать формулу (19) в матричном виде, считая векторы столбцами координат относительно некоторого положительно ориентированного ортонормированного базиса.

12. Дуальный базис и его матрица Грама

Определение 12.1. Базис $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^k$ называется *дуальным* (или *двойственным*) к базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ ($k = 2$ или 3), если

$$(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{20}$$

Предложение 12.1. *Базис, дуальный к любому данному, всегда существует.*

Схема доказательства. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ — данный базис. Существование векторов $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^k$, удовлетворяющих (20), следует из теоремы 6.4. Их линейная независимость доказывается от противного через свойства билинейности скалярного произведения. □

Предложение 12.2. *Векторы $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$ базиса в пространстве, дуального к $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, находятся из формул*

$$\boldsymbol{e}^1 = \frac{[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}. \tag{21}$$

Схема доказательства. Воспользуемся определением векторного и смешанного произведений. □

Контрольный вопрос 12.1. Зависят ли правые части равенств (21) от выбранной ориентации пространства?

Теорема 12.3. *Матрица Грама базиса, дуального к данному, обратна к матрице Грама данного базиса.*

Схема доказательства. Воспользуемся ответом на контрольный вопрос 7.2. □

Следствие 12.4. *Для векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ в пространстве имеют место тождества*

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \end{vmatrix}, \qquad [[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{a}. \tag{22}$$

13. Сферический треугольник. Теоремы синусов и косинусов на сфере

Под *сферой* в этом параграфе всюду понимается единичная сфера $\mathbb{S}^2$ в трехмерном пространстве с центром в фиксированной точке O.

Определение 13.1. *Выпуклым n-угольником на сфере* называется пересечение сферы $\mathbb{S}^2$ с некоторым выпуклым n-гранным углом $\mathfrak{A}$ с вершиной в точке O. *Сторонами* этого n-угольника называются пересечения со сферой граней угла $\mathfrak{A}$, *длинами сторон* — угловые величины соответствующих граней, *вершинами* — пересечение со сферой ребер угла $\mathfrak{A}$, а *углами* — величины соответствующих двугранных углов n-гранного угла $\mathfrak{A}$. *Внешними углами* выпуклого n-угольника P называются величины $\pi - \alpha$, где α — один из углов P.

Теорема 13.1 (Сферические теоремы синусов и косинусов)**.** *Пусть a, b, c — длины сторон, а α, β, γ — соответственно противолежащие им углы сферического выпуклого треугольника. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c},$$
$$\cos\gamma \cdot \sin a \cdot \sin b = \cos c - \cos a \cdot \cos b,$$
$$\cos c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\gamma.$$

Схема доказательства. Обозначим направляющие единичные векторы ребер трехгранного угла, сечением которого образован данный треугольник, через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, а единичные нормали к граням, направленные внутрь угла, через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$. Ориентацию базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ примем за положительную.

При подходящей нумерации этих векторов будем иметь:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \frac{[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]}{\sin a}, & \boldsymbol{f}_2 &= \frac{[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]}{\sin b}, & \boldsymbol{f}_3 &= \frac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{\sin c}, \\
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{[\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3]}{\sin\alpha}, & \boldsymbol{e}_2 &= \frac{[\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1]}{\sin\beta}, & \boldsymbol{e}_3 &= \frac{[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]}{\sin\gamma}, \\
\cos a &= (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3), & \cos b &= (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1), & \cos c &= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2), \\
\sin a &= |[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]|, & \sin b &= |[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]|, & \sin c &= |[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]|, \\
-\cos\alpha &= (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3), & -\cos\beta &= (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1), & -\cos\gamma &= (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2), \\
\sin\alpha &= |[\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3]|, & \sin\beta &= |[\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1]|, & \sin\gamma &= |[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]|.
\end{aligned} \tag{23}$$

Далее используем тождества (22). □

Контрольный вопрос 13.1. Показать, что обычные теоремы синусов и косинусов получаются в пределе при $a, b, c \to 0$.

Контрольный вопрос 13.2. Выполняются ли неравенства треугольника для сторон сферического треугольника? А для углов? А для внешних углов?

14. Площадь сферического многоугольника как угловой дефект

Определение 14.1. *Угловым дефектом* (выпуклого) сферического n-угольника называется разность между 2π и суммой его внешних углов.

Теорема 14.1. *Угловой дефект (выпуклого) сферического n-угольника равен его площади.*

Схема доказательства. Сначала проверим аддитивность углового дефекта.

Всякий сферический многоугольник можно разбить на сколь угодно маленькие треугольники, поэтому достаточно доказать утверждение для малых треугольников, причем достаточно показать, что равенство имеет место приближенно с относительной погрешностью, которая при уменьшении размера треугольника стремится к нулю. Далее знак '$\approx$' означает такое приближение.

Будем использовать обозначения из теоремы 13.1. Угловой дефект треугольника равен $\alpha+\beta+\gamma-\pi$. При $a,b,c \ll 1$ углы α, β и γ близки к углам плоского треугольника со сторонами a,b,c, поэтому угловой дефект мал. Далее он оценивается следующим образом (с помощью теорем косинусов и синусов):

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi \approx \frac{\cos(\pi-\alpha-\beta)-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}(1-\cos c) \approx \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}\frac{c^2}{2} \approx \frac{1}{2}\sin\gamma\cdot ab.$$

Для малого сферического треугольника последнее выражение приблизительно равно его площади. □

15. Задание прямых и плоскостей общими и параметрическими уравнениями. Многочлены первой степени на плоскости и в пространстве. Полуплоскости и полупространства

Для задания прямых и плоскостей наиболее часто используют следующие два способа: параметрически и с помощью (системы) линейных уравнений. Параметрический способ задания подмножества означает задание этого подмножества вместе с некоторой системой координат на нем. Для параметрического задания плоскостей и прямых мы по умолчанию используем аффинные системы координат.

Так, для задания прямой на плоскости или в пространстве нужно выбрать на ней некоторый репер $(P,\boldsymbol{v})$, и тогда эта прямая будет задана как множество таких точек M, что вектор $\overrightarrow{PM}$ коллинеарен $\boldsymbol{v}$. В аффинных координатах объемлющей плоскости или, соответственно, пространства этот факт записывают следующим образом:

$$M(t) = P + t\cdot\boldsymbol{v}, \quad t\in\mathbb{R},$$

где M, P и $\boldsymbol{v}$ нужно заменить на соответствующий набор аффинных координат. В случае плоскости получаются два уравнения:

$$x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt,$$

а в случае пространства — три:

$$x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt, \quad z(t) = z_0 + ct.$$

Здесь (x_0,y_0) или, соответственно, (x_0,y_0,z_0) — координаты точки P, а (a,b) или (a,b,c) — координаты вектора $\boldsymbol{v}$. Точку P в этом контексте называют *начальной*, а вектор $\boldsymbol{v}$ — направляющим вектором данной прямой.

Предложение 15.1. *Пусть прямая ℓ задана начальной точкой P и направляющим вектором $\boldsymbol{v}$, а прямая ℓ' — начальной точкой P' и направляющим вектором $\boldsymbol{v}'$. Тогда прямые ℓ и ℓ' совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}\overrightarrow{PP'} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}'\end{pmatrix} = 1.$$

Схема доказательства. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно переменных t и t'

$$P + t\boldsymbol{v} = P' + t'\boldsymbol{v}'$$

и применим теорему Кронекера–Капелли. □

Аналогичным образом, для задания плоскости в пространстве будем использовать какой-нибудь репер $(P, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ в ней, то есть некоторую начальную точку P и пару неколлинеарных векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Плоскость будет задана как множество всевозможных точек вида

$$M(s,t) = P + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Предложение 15.2. *Две плоскости в пространстве, заданные реперами $(P, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ и $(P', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')$, совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \overrightarrow{PP'} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}' \end{pmatrix} = 2.$$

Схема доказательства. Аналогично предложению 15.1. □

Предложение 15.3. (i) *Пусть x, y — некоторая аффинная система координат на плоскости, а $f(x,y) = Ax + By + C$ — многочлен первой степени. Тогда уравнение $f(x,y) = 0$ задает прямую.*

(ii) *Любая прямая на плоскости может быть задана таким образом в произвольной аффинной системе координат.*

(iii) *Вектор с координатами (α, β) параллелен прямой, заданной уравнением $Ax+By+C = 0$ тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta = 0$.*

(iv) *Две прямые, заданные уравнениями $Ax + By + C = 0$ и $A'x + B'y + C' = 0$ совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1,$$

то есть когда многочлены $Ax + By + C$ и $A'x + B'y + C'$ пропорциональны.

Схема доказательства. Применим теорему об общем решении системы линейных уравнений и теорему Кронекера–Капелли. □

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ часто называют *общим* уравнением прямой.

Предложение 15.4. (i) *Пусть x, y, z — некоторая аффинная система координат в пространстве, а $f(x,y,z) = Ax+By+Cz+D$ — многочлен первой степени. Тогда уравнение $f(x,y,z) = 0$ задает плоскость.*

(ii) *Любая плоскость в пространстве может быть задана таким образом в произвольной аффинной системе координат.*

(iii) *Вектор с координатами (α, β, γ) параллелен плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.*

(iv) *Две плоскости, заданные уравнениями $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1,$$

то есть когда многочлены $Ax + By + Cz + D$ и $A'x + B'y + C'z + D'$ пропорциональны.

Схема доказательства. Аналогично предложению 15.3. □

Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ называют *общим* уравнением плоскости.

Предложение 15.5. (i) *Пусть x, y, z — некоторая аффинная система координат в пространстве, а $f_1(x,y,z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ и $f_2(x,y,z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$ — такие два многочлена первой степени, что*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Тогда система уравнений $f_1(x,y,z) = 0$, $f_2(x,y,z) = 0$ задает прямую.

(ii) *Любая прямая в пространстве может быть задана таким образом в произвольной аффинной системе координат.*

(iii) *Вектор с координатами* (α, β, γ) *параллелен прямой, заданной системой уравнений* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0$, $A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$.

(iv) *Две прямые, заданные системами уравнений* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *и* $A_1'x + B_1'y + C_1'z + D_1' = 0$, $A_2'x + B_2'y + C_2'z + D_2' = 0$, *совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' & D_2' \end{pmatrix} = 2.$$

Схема доказательства. Аналогично предложению 15.3. □

Предложение 15.6. *Любой многочлен первой степени от аффинных координат на плоскости или в пространстве является одной из координат некоторой (другой) аффинной системы координат.*

Схема доказательства. Пусть f — многочлен первой степени от координат некоторой аффинной системы. Выберем начало отсчета новой аффинной системы координат в такой точке O, что $f(O) = 0$, а за первый базисный вектор возьмем такой вектор $\overrightarrow{OA}$, что $f(A) = 1$. Остальные базисные векторы выберем параллельными прямой (плоскости), заданной уравнением $f = 0$. В построенной системе координат f будет первой координатой. □

Предложение 15.7. *Пусть f — многочлен первой степени от некоторых аффинных координат на плоскости или в пространстве, A и B — две различные точки, не лежащие на прямой или, соответственно, плоскости ξ, заданной уравнением $f = 0$. Тогда точка пересечения прямой AB с этой прямой или плоскостью делит отрезок AB в отношении $-f(A) : f(B)$. Отрезок AB пересекает ξ тогда и только тогда, когда числа $f(A)$ и $f(B)$ имеют разные знаки.*

Схема доказательства. С помощью предложения 15.6 сведем общий случай к такому, в котором f — первая координата. Воспользуемся теоремой 5.3. □

Определение 15.1. Пусть прямая ℓ на плоскости задана уравнением $f = 0$, где f — некоторый многочлен от аффинных координат некоторой системы. Тогда подмножества плоскости, заданные неравенствами $f \geqslant 0$ и $f \leqslant 0$ называются *полуплоскостями*, на которые прямая ℓ разделяет плоскость.

Определение 15.2. Пусть плоскость Π в пространстве задана уравнением $f = 0$, где f — некоторый многочлен от аффинных координат некоторой системы. Тогда подмножества пространства, заданные неравенствами $f \geqslant 0$ и $f \leqslant 0$ называются *полупространствами*, на которые плоскость Π разделяет пространство.

Контрольный вопрос 15.1. Как определить, что вектор с началом на данной прямой (плоскости), заданной уравнением $f = 0$, направлен в сторону полуплоскости (полупространства), в которой $f \geqslant 0$?

Пусть прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$. В «положительную» или «отрицательную» полуплоскость направлен вектор с координатами (A, B)?

Аналогичный вопрос для плоскости.

16. Понятие аффинной классификации геометрических объектов. Взаимное расположение прямых на плоскости и плоскостей в пространстве

Контрольный вопрос 16.1. Принято говорить, что существует ровно три способа взаимного расположения двух прямых на плоскости: (1) прямые могут совпадать, (2) прямые могут быть параллельны, но различны и (3), прямые могут пересекаться в одной точке. Каков точный смысл этого утверждения? Что такое способ взаимного расположения?

Определение 16.1. Пусть X и Y — два геометрических объекта на плоскости или в пространстве, где под геометрическим объектом мы понимаем некоторое подмножество или семейство (упорядоченное или неупорядоченное) подмножеств. Говорят, что X и Y *аффинно эквивалентны*, если можно подобрать две аффинные системы координат $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ так, что объект X может быть задан в системе $x_1, \ldots, x_k$ точно так же (уравнением, системой уравнений, и т.п.), как объект Y в системе $y_1, \ldots, y_k$.

Контрольный вопрос 16.2. Является ли аффинная эквивалентность отношением эквивалентности?

Аффинная классификация объектов данного типа означает описание множества классов аффинной эквивалентности этих объектов, как правило, путем предъявления ровно по одному представителю из каждого класса.

Теорема 16.1 (Аффинная классификация пар прямых на плоскости)**.** *Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — две прямые на плоскости. Тогда выполнено ровно одно из следующих утверждений:*

- *прямые ℓ_1 и ℓ_2 в некоторой аффинной системе координат x, y имеют уравнения*
$$y = 0, \quad y = 0;$$
- *прямые ℓ_1 и ℓ_2 в некоторой аффинной системе координат x, y имеют уравнения*
$$y = 0, \quad y = 1;$$
- *прямые ℓ_1 и ℓ_2 в некоторой аффинной системе координат x, y имеют уравнения*
$$y = 0, \quad x = 0.$$

Схема доказательства. В каждом из трех случаев взаимного расположения укажем, как подобрать подходящую систему координат. □

Теорема 16.2 (Аффинная классификация пар прямых в пространстве)**.** *Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — две прямые в пространстве. Тогда выполнено ровно одно из следующих утверждений:*

- *прямые ℓ_1 и ℓ_2 в некоторой аффинной системе координат x, y, z задаются системами уравнений*
$$y = 0,\ z = 0 \quad \text{и} \quad y = 0,\ z = 0;$$
- *прямые ℓ_1 и ℓ_2 в некоторой аффинной системе координат x, y, z задаются системами уравнений*
$$y = 0,\ z = 0 \quad \text{и} \quad y = 1,\ z = 0;$$
- *прямые ℓ_1 и ℓ_2 в некоторой аффинной системе координат x, y, z задаются системами уравнений*
$$y = 0,\ z = 0 \quad \text{и} \quad x = 0,\ z = 0;$$
- *прямые ℓ_1 и ℓ_2 в некоторой аффинной системе координат x, y, z задаются системами уравнений*
$$y = 0,\ z = 0 \quad \text{и} \quad x = 0,\ z = 1.$$

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 16.1. □

Контрольный вопрос 16.3. Сколько существует способов взаимного расположения двух прямых в четырехмерном пространстве?

Контрольный вопрос 16.4. Сколько существует способов взаимного расположения трех прямых на плоскости?

Теорема 16.3 (Аффинная классификация пар плоскостей в пространстве)**.** *Пусть Π_1 и Π_2 — две плоскости в пространстве. Тогда выполнено ровно одно из следующих утверждений:*

- *плоскости* Π_1 *и* Π_2 *в некоторой аффинной системе координат* x, y, z *имеют уравнения*
$$y = 0, \quad y = 0;$$
- *плоскости* Π_1 *и* Π_2 *в некоторой аффинной системе координат* x, y, z *имеют уравнения*
$$y = 0, \quad y = 1;$$
- *плоскости* Π_1 *и* Π_2 *в некоторой аффинной системе координат* x, y, z *имеют уравнения*
$$y = 0, \quad x = 0.$$

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 16.1. □

17. Пучки и связки прямых и плоскостей, геометрический смысл линейной зависимости уравнений

Определение 17.1. *Собственным пучком прямых* называется семейство всех прямых на плоскости, проходящих через некоторую фиксированную точку (называемую *центром*) пучка.

Несобственным пучком прямых называется семейство всех прямых на плоскости, параллельных некоторому фиксированному направлению.

Предложение 17.1. *Пусть* ℓ_1 *и* ℓ_2 *— две различные прямые на плоскости. Тогда существует ровно один пучок прямых, их содержащий.*

Схема доказательства. Используем теорему 16.1. □

Теорема 17.2. *Три прямые на плоскости принадлежат некоторому одному пучку (собственному или несобственному) тогда и только тогда, когда общие уравнения, которыми они заданы, линейно зависимы.*

Схема доказательства. Используем теоремы о решениях систем линейных уравнений. □

Контрольный вопрос 17.1. На плоскости даны три прямые, заданные в аффинной системе координат уравнениями $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Изменяя аффинную систему координат, выяснить геометрический смысл выражения

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Определение 17.2. *Собственным пучком плоскостей* называется семейство всех плоскостей в пространстве, содержащих некоторую фиксированную прямую.

Несобственным пучком плоскостей называется семейство всех плоскостей в пространстве, параллельных некоторому фиксированному направлению плоскостей.

Предложение 17.3. *Пусть* Π_1 *и* Π_2 *— две различные плоскости в пространстве. Тогда существует ровно один пучок плоскостей, их содержащий.*

Схема доказательства. Используем теорему 16.3. □

Теорема 17.4. *Три плоскости в пространстве принадлежат некоторому одному пучку (собственному или несобственному) тогда и только тогда, когда общие уравнения, которыми они заданы, линейно зависимы.*

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 17.2. □

Определение 17.3. *Собственной связкой плоскостей* называется семейство всех плоскостей в пространстве, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Несобственной связкой плоскостей называется семейство всех плоскостей в пространстве, параллельных некоторому фиксированному вектору.

Предложение 17.5. *Пусть* Π_1, Π_2, Π_3 *— три плоскости в пространстве, не принадлежащие никакому одному пучку. Тогда существует ровно одна связка плоскостей, их содержащая.*

Схема доказательства. Использовать теоремы Кронекера–Капелли и об общем решении системы линейных уравнений. □

Теорема 17.6. *Четыре плоскости в пространстве принадлежат некоторой одной связке (собственной или несобственной) тогда и только тогда, когда их общие уравнения линейно зависимы.*

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 17.2. □

Определение 17.4. *Собственной связкой прямых* называется семейство всех прямых в пространстве, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Несобственной связкой прямых называется семейство всех прямых в пространстве, параллельных некоторому фиксированному направлению.

18. Понятие метрической классификации геометрических объектов. Формулы для расстояний и углов между прямыми и/или плоскостями в прямоугольных системах координат

Определение 18.1. Пусть X и Y — два геометрических объекта на плоскости или в пространстве. Говорят, что X и Y *метрически* (или *ортогонально*) *эквивалентны*, если можно подобрать две прямоугольные системы координат $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ так, что объект X может быть задан в системе $x_1, \ldots, x_k$ точно так же (уравнением, системой уравнений, и т.п.), как объект Y в системе $y_1, \ldots, y_k$.

Контрольный вопрос 18.1. Каково множество классов метрической эквивалентности пар прямых на плоскости?

Для классификации, а именно для доказательства *неэквивалентности* объектов, часто используют *инварианты*, которые называют аффинными, ортогональными или иными, в зависимости от того, какая эквивалентность рассматривается. Например, ортогональными инвариантами в случае пар прямых или плоскостей могут быть такие величины, как расстояния и углы.

Лемма 18.1. (i) *Пусть* x, y *— прямоугольная система координат на плоскости, а* $Ax + By + C$ *— многочлен первой степени. Тогда вектор с координатами* (A, B) *ортогонален прямой* $Ax + By + C = 0$.

(ii) *Пусть* x, y, z *— прямоугольная система координат на плоскости, а* $Ax + By + Cz + D$ *— многочлен первой степени. Тогда вектор с координатами* (A, B, C) *ортогонален прямой* $Ax + By + Cz + D = 0$.

Схема доказательства. Использовать пункт (iii) предложений 15.3 и 15.4 и формулу (16). □

Контрольный вопрос 18.2. Что такое расстояние от точки до прямой или до плоскости? Что такое расстояние между двумя прямыми, между прямой и плоскостью? Что такое угол между плоскостями?

Предложение 18.2. (i) *Пусть* x, y *— прямоугольная система координат на плоскости. Тогда расстояние от произвольной точки с координатами* (x_0, y_0) *до произвольной прямой, заданной* *уравнением* $Ax + By + C = 0$*, равно*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(ii) *Пусть* x, y, z *— прямоугольная система координат в пространстве. Тогда расстояние от произвольной точки с координатами* (x_0, y_0, z_0) *до произвольной плоскости, заданной уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$*, равно*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Схема доказательства. Пусть M — данная точка, а P — произвольная точка данной прямой (плоскости). Выразить через их координаты длину проекции вектора $\overrightarrow{PM}$ на вектор нормали (A, B) (соответственно, (A, B, C)). □

Контрольный вопрос 18.3. Что именно изменится в формулах для расстояния от точки до прямой на плоскости или до плоскости в пространстве, если предполагать лишь аффинность системы координат?

Следствие 18.3. (i) *Пусть* x, y *— прямоугольная система координат на плоскости. Тогда расстояние между произвольными параллельными прямыми, заданными уравнениями* $Ax + By + C_1 = 0$ *и* $Ax + By + C_2 = 0$*, равно*

$$\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(ii) *Пусть* x, y, z *— прямоугольная система координат в пространстве. Тогда расстояние между произвольными параллельными плоскостями, заданными* $Ax+By+Cz+D_1 = 0$ *и* $Ax+By + Cz + D_2 = 0$*, равно*

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Предложение 18.4. (i) *Угол между произвольными двумя прямыми на плоскости, заданными в некоторой прямоугольной системе координат уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$*, равен*

$$\arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

(ii) *Угол между произвольными двумя плоскостями в пространстве, заданными в некоторой прямоугольной системе координат уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$*, равен*

$$\arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Контрольный вопрос 18.4. Две непараллельные прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2 = 0$ в некоторой прямоугольной системе координат на плоскости. Каков геометрический смысл выражения

$$\arccos\left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \cdot \operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)?$$

Контрольный вопрос 18.5. Две непараллельные прямые в пространстве заданы параметрически:

$$\ell_1 : P_1 + \boldsymbol{v}_1 t, \quad \ell_2 : P_2 + \boldsymbol{v}_2 t,$$

где t — параметр. Каков геометрический смысл выражения

$$\frac{G\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\right)}{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}?$$

Контрольный вопрос 18.6. Используя лишь соображения наличия в формуле геометрического смысла и обращения ее значения в нуль там, где это необходимо, предложить формулу для вычисления расстояния между двумя непараллельными прямыми в пространстве, заданными в прямоугольной системе координат системами линейных уравнений.

19. Формулы перехода между аффинными системами координат. Ортогональные матрицы. Общий вид ортогональной матрицы размера 2×2

Теорема 19.1. *Пусть $(O, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$ и $(O', \boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_k)$ — два репера на плоскости или в пространстве, C — матрица перехода от первого базиса ко второму, а $\boldsymbol{x}_0$ — столбец координат точки O' в первом репере. Тогда для любой точки столбцы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ ее координат в первом и втором реперах соответственно связаны соотношением*

$$\boldsymbol{x} = C \cdot \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_0. \tag{24}$$

Схема доказательства. Непосредственно из определений 5.5 и 8.1 (аффинной системы координат и матрицы перехода). □

Контрольный вопрос 19.1. Обратить замену координат (24) и записать в таком же виде.

Контрольный вопрос 19.2. В каком случае набор многочленов первой степени от координат некоторой аффинной системы также образует аффинную систему координат?

Определение 19.1. Матрица A называется *ортогональной*, если $A^\top A = E$.

Контрольный вопрос 19.3. Образуют ли ортогональные матрицы фиксированного размера группу?

Контрольный вопрос 19.4. Сколько свободных параметров возникает при построении общей ортогональной матрицы размера $n \times n$?

Теорема 19.2. *Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ и $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{e}}_k$ — два базиса на плоскости или в пространстве ($k = 2$ или 3). Из следующих трех утверждений любые два влекут третье*:

1) *базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ ортонормирован;*
2) *базис $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{e}}_k$ ортонормирован;*
3) *матрица перехода от $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ к $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{e}}_k$ ортогональна.*

Предложение 19.3. *Определитель любой ортогональной матрицы равен 1 или -1.*

Схема доказательства. При транспонировании определитель не меняется, а при умножении матриц определители умножаются. □

Предложение 19.4. *Ортогональная матрица размера 2×2 имеет общий вид*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

если ее определитель равен 1 и

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},$$

если определитель равен -1.

Схема доказательства. Применим метод неопределенных коэффициентов. □

20. Ортогональные матрицы размера 3×3. Углы Эйлера

Теорема 20.1. *Любая ортогональная матрица A размера 3×3 с определителем 1 представляется в виде следующего произведения*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $\theta \in [0, \pi]$, причем в случае, когда последний элемент в последней строке матрицы отличен от ± 1, такое представление единственно.

Схема доказательства. Сначала покажем единственность разложения. Матрица в правой части равенства (25) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dagger & \dagger & \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \dagger & \dagger & -\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \sin\theta \cdot \sin\psi & \sin\theta \cdot \cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Угол θ однозначно определяется по последнему элементу последней строки. Если $\theta \notin \{0, \pi\}$, то из последнего столбца и последней строки углы φ и ψ определяются однозначно с точностью до прибавления $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теперь покажем существование разложения. Из предыдущего рассуждения получаем, что можно подобрать φ, θ и ψ так, чтобы матрица в правой части (25) имела такие же последний столбец и последние строку, как и A. Остается показать, что если две ортогональные матрицы A и B размера 3×3 с определителем 1 имеют одинаковые последние строку и столбец, то либо они совпадают, либо на пересечении этих строки и столбца в A и B стоит ± 1. Для этого нужно рассмотреть матрицу AB^{-1}. □

Контрольный вопрос 20.1. Как определить углы φ, θ, ψ из равенства (25) в геометрических терминах, если A — это матрица перехода между ортонормированными базисами?

Разложение (25) используют в классической механике для описания положения твердого тела (к которому «привязан» подвижный базис) относительно фиксированного базиса. Величины φ, θ и ψ называют тогда *углом прецессии*, *углом нутации* и *углом собственного вращения* соответственно, а собирательно — *углами Эйлера*.

Контрольный вопрос 20.2. В авиации углами Эйлера называют три другие угла: *рыскания*, *тангажа* и *крена*. Какое разложение ортогональной матрицы в произведение соответствует им?

Предложение 20.2. (i) *Для любой кососимметричной матрицы B матрица $Q = (E+B)(E-B)^{-1}$ ортогональна, а матрица $Q + E$ невырождена.*

(ii) *Если матрица Q ортогональна, а $E + Q$ невырождена, то матрица $B = (-E+Q)(E+Q)^{-1}$ кососимметрична.*

Схема доказательства. Используем тот факт, что для любой матрицы X матрицы $E + X$ и $E - X$ (равно как и любые другие многочлены от X) коммутируют друг с другом. □

21. Алгебраические уравнения. Инвариантность степени многочлена при аффинной замене координат. Кривые и поверхности второго порядка. Преобразование многочлена второй степени при аффинной замене координат

Предложение 21.1. *Пусть $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ — две аффинные системы координат на плоскости или в пространстве, и пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$ — некоторый многочлен степени m. Тогда при подстановке в него вместо координат $x_1, \ldots, x_k$ их выражений через $y_1, \ldots, y_k$ снова получится многочлен степени m.*

Схема доказательства. Так как выражения одних аффинных координат через другие имеет вид многочленов первой степени, при указанной подстановке степень не возрастет. Так как возможна обратная замена, степень не может также и уменьшиться. □

Определение 21.1. Пусть $m \in \mathbb{N} \cup \{0, -\infty\}$. *Алгебраическим уравнением порядка m* называется уравнение вида $f = 0$, где f — функция на плоскости или в пространстве, которая в некоторой (и тогда — согласно предложению 21.1 — в любой) аффинной системе координат имеет вид многочлена степени m от координат. Два уравнения $f = 0$ и $\widetilde{f} = 0$ считаются одинаковыми, если функции f и $\widetilde{f}$ отличаются ненулевым множителем.

Контрольный вопрос 21.1. Какое множество может задавать уравнение нулевой степени?

Говоря в дальнейшем о кривых или поверхностях второго порядка, мы имеем в виду именно алгебраические уравнения второго порядка на плоскости или в пространстве соотвественно.

Общий вид кривой второго порядка в аффинных координатах x, y таков:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{26}$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{12} отличен от нуля. *Матрицей квадратичной части* многочлена в левой части этого уравнения мы будем называть матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

а *матрицей коэффициентов* — матрицу

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, общий вид уравнения поверхности второго порядка в аффинных координатах x, y, z таков:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \tag{27}$$

где хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ ненулевой. Матрицей квадратичной части и матрицей коэффициентов многочлена в левой части этого уравнения мы будем называть

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Используя матрицы коэффициентов, уравнения (26) и (27) можно кратко записать в виде

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^\top \widehat{Q} \widehat{\boldsymbol{x}} = 0,$$

где $\widehat{\boldsymbol{x}}$ — это столбец координат, дополненный снизу единицей:

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение 21.2. *Будем использовать обозначения из теоремы 19.1. Пусть f — функция на плоскости или в пространстве, которая через аффинные координаты $\boldsymbol{x}$ выражается многочленом второй степени, имеющим матрицу квадратичной части Q и матрицу коэффициентов $\widehat{Q}$, а в координатах $\boldsymbol{x}'$ — соответственно Q' и $\widehat{Q}'$. Тогда эти матрицы связаны соотношениями*

$$Q' = C^\top Q C, \quad \widehat{Q}' = \widehat{C}^\top \widehat{Q} \widehat{C}, \tag{28}$$

где $\widehat{C}$ — следующая матрица:

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} C & \boldsymbol{x}_0 \\ 0\dots 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Схема доказательства. Используем матричную запись уравнения и формулы (24). □

22. Вырожденный многочлен второй степени. Редукция вырожденного многочлена к меньшему числу переменных

Предложение 22.1. *Пусть f — многочлен второй степени от n переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, а $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ — такой вектор, что имеет место тождество $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x})$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ также имеет место тождество $f(\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x})$.*

Схема доказательства. Сначала рассмотрим случай $\lambda \in \mathbb{Z}$, для которого утверждение получается индукцией по $|\lambda|$. Далее рассмотрим разность $f(\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})$ и воспользуемся тем, что многочлен с бесконечным числом корней может быть только нулевым. □

Определение 22.1. Многочлен $f(\boldsymbol{x})$ второй степени назовем *вырожденным*, если найдется ненулевой вектор $\boldsymbol{v}$, для которого будет выполнено тождество $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x})$. Если можно найти m линейно независимых векторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ с этим свойством, то многочлен f называется *m-кратно вырожденным.*

Предложение 22.2. *Если многочлен f второй степени от n неизвестных m-кратно вырожден, то можно подобрать прямоугольную систему координат $y_1, \dots, y_n$, в которой он будет зависеть только от первых $n - m$ координат.*

Схема доказательства. Выберем ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ так, чтобы тождество $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i) = f(\boldsymbol{x})$ выполнялось для всех $i = n - m + 1, \dots, n$. □

Контрольный вопрос 22.1. Какую роль играет в утверждениях выше степень многочлена?

Контрольный вопрос 22.2. Если распространить определение 22.1 на многочлены первой степени, какой может быть кратность их вырождения?

Предложение 22.3. *Пусть f — многочлен второй степени, $\widehat{Q}$ — его матрица коэффициентов, а $\boldsymbol{v}$ — вектор соответствующего пространства. Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{v}}$ столбец координат вектора $\boldsymbol{v}$ с приписанным снизу нулем. Тогда условие инвариантности f при сдвиге на вектор $\boldsymbol{v}$ равносильно следующему:*

$$\widehat{Q}\widehat{\boldsymbol{v}} = 0.$$

Схема доказательства. Будем обозначать через $\boldsymbol{x}$ столбец координат произвольной точки, а через $\widehat{\boldsymbol{x}}$ — этот же столбец с приписанной снизу единицей. Тогда условие инвариантности f при сдвиге на вектор $\boldsymbol{v}$ превращается в тождество

$$(\widehat{\boldsymbol{x}} + \widehat{\boldsymbol{v}})^\top \widehat{Q}(\widehat{\boldsymbol{x}} + \widehat{\boldsymbol{v}}) = \widehat{\boldsymbol{x}}^\top \widehat{Q}\widehat{\boldsymbol{x}},$$

которое при упрощении превращается в

$$(2\widehat{\boldsymbol{x}} + \widehat{\boldsymbol{v}})^\top \widehat{Q}\widehat{\boldsymbol{v}} = 0.$$

Утверждение теперь следует из произвольности всех координат в $\widehat{\boldsymbol{x}}$, кроме последней. □

Следствие 22.4. *Многочлен второй степени с матрицей квадратичной части Q и матрицей коэффициентов $\widehat{Q}$ вырожден тогда и только тогда, когда вырождены обе матрицы Q и $\widehat{Q}$.*

23. Приведение многочлена второй степени к каноническому виду

Теорема 23.1. *Для всякого многочлена $f(\boldsymbol{x})$ второй степени можно подобрать ортогональную замену координат $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ так, что многочлен $f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}))$ будет иметь один из двух видов:*

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2 + \tau \quad \textit{или} \quad \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_k y_k^2 + 2\mu y_{k+1}^2, \tag{30}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \neq 0$, $\mu > 0$.

Схема доказательства. Рассмотрим сначала однородный многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ второй степени. Пусть λ_1 — его наименьшее значение на сфере

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

и достигается оно в точке A. Возьмем вектор $\overrightarrow{OA}$ за первый базисный вектор новой прямоугольной системы координат $y_1, \ldots, y_n$.

Положим $\widetilde{f}(y_1, \ldots, y_n) = f(\boldsymbol{x}(y_1, \ldots, y_n)) - \lambda_1(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$. Этот многочлен всюду неотрицателен и обращается в нуль на координатной оси Oy_1. Отсюда $\widetilde{f}$ не зависит от y_1. Далее по индукции получаем, что ортогональной заменой координат данный многочлен можно привести к первому из видов (30).

Теперь рассмотрим произвольный многочлен второй степени. По предыдущему можем считать, что его квадратичная часть включает только квадраты переменных:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 + 2a_1 x_1 + \ldots + 2a_n x_n + a_0.$$

Переставив переменные, добьемся, чтобы выполнялось $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \neq 0$ и $\lambda_j = 0$ при $j > k$.

Выделяя полные квадраты, сведем задачу к случаю $a_1 = \ldots = a_k = 0$. Если при этом линейных членов не осталось, то многочлен имеет первый вид из (30). Если линейные члены остались, ортогональной заменой, затрагивающей только последние $n - k$ координат, сделаем

$$\frac{a_{k+1} x_k + \ldots + a_n x_n + a_0/2}{\sqrt{a_{k+1}^2 + \ldots + a_n^2}}$$

$(k+1)$-й координатой, после чего многочлен приобретет второй вид из (30). □

24. Ортогональные инварианты многочлена второй степени. Единственность канонического вида

Пусть функция f на плоскости или в пространстве (любой размерности) представляется многочленом в некоторой аффинной системе координат. Тогда то же верно для любой другой аффинной системы. Будем обозначать матрицу коэффициентов получающегося многочлена через $\widehat{Q}(f, \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ обозначает систему координат, а через $Q(f, \mathfrak{X})$ обозначим матрицу квадратичной части.

Определение 24.1. Функция I от симметричной матрицы размера $(n+1) \times (n+1)$ называется *ортогональным инвариантом* многочлена f второй степени, если $I\big(\widehat{Q}(f, \mathfrak{X})\big)$ не зависит от $\mathfrak{X}$ при условии, что $\mathfrak{X}$ — прямоугольная система координат.

Если $I\big(\widehat{Q}(f, \mathfrak{X})\big)$ постоянно, когда $\mathfrak{X}$ пробегает все аффинные системы координат, то I называется *аффинным инвариантом* многочлена второй степени.

Определение 24.2. *Характеристическим многочленом* квадратной матрицы A называется следующий многочлен от переменной λ:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E),$$

где E обозначает единичную матрицу того же размера, что и A.

Теорема 24.1. (i) *Все коэффициенты характеристического многочлена* $\chi_{Q(f,\mathfrak{X})}(\lambda)$ *являются ортогональными инвариантами многочлена* f.

(ii) *Коэффициент при* λ^m *в многочлене* $\chi_{\widehat{Q}(f,\mathfrak{X})}(\lambda)$ *является ортогональным инвариантом* m*-кратно вырожденного многочлена* f.

(iii) *Многочлен* f *второй степени* m*-кратно вырожден тогда и только тогда, когда, независимо от выбора аффинной системы координат* $\mathfrak{X}$, *оба характеристических многочлена* $\chi_{Q(f,\mathfrak{X})}(\lambda)$ *и* $\chi_{\widehat{Q}(f,\mathfrak{X})}(\lambda)$ *делятся на* λ^m.

Схема доказательства. (i) С помощью предложения 21.2 утверждение сводится к тому, что матрицы Q и $Q' = C^\top QC$, где C — ортогональная матрица, имеют одинаковые характеристические многочлены. Убедимся в этом:

$$\det(Q' - \lambda E) = \det(C^\top QC - \lambda E) = \det\big(C^\top(Q - \lambda E)C\big) = \det(Q - \lambda E),$$

так как $\det C = \pm 1$ по предложению 19.3.

(ii) Аналогично предыдущему получаем, что и характеристический многочлен матрицы $\widehat{Q}(f,\mathfrak{X})$ не изменяется, если при замене сохраняется начало координат. Утверждение сводится к частному случаю, когда одна система координат каноническая, а другая получается из нее сдвигом.

Легко видеть, что степень вырожденности m многочлена f равна числу переменных, отсутствующих в его каноническом виде. Остается проверить, что при $C = E$ разность

$$\chi_{\widehat{Q}}(\lambda) - \chi_{\widehat{C}^\top\widehat{Q}\widehat{C}}(\lambda)$$

делится на λ^{m+1}, где $\widehat{C}$ определена в (29). Для этого воспользоваться равенством

$$\det\big(\widehat{C}^\top\widehat{Q}\widehat{C} - \lambda E\big) = \det\big(\widehat{Q} - \lambda(\widehat{C}\widehat{C}^\top)^{-1}\big).$$ □

Теорема 24.2. *Канонический вид многочлена второй степени определен однозначно с точностью до перестановки координат.*

Схема доказательства. Канонический вид определяется по значениям ортонональных инвариантов данного многочлена второй степени. □

25. Метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка

«*Привести уравнение* X *к виду* Y» означает сделать в уравнении X замену координат и умножить уравнение на некоторое ненулевое число так, что получится уравнение Y. При этом указывается, какому классу принадлежит замена координат.

Теорема 25.1 (Метрическая классификация кривых второго порядка)**.** *Всякая кривая второго порядка ортогональной заменой координат приводится к одному и только одному из перечисленных ниже видов, причем при единственном значении указанных параметров*:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b > 0$ (*эллипс*);
2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, $a \geqslant b > 0$ (*мнимый эллипс*);
3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ (*гипербола*);
4) $y^2 = 2px$, $p > 0$ (*парабола*);
5) $\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 0$, $a \geqslant 1$ (*пара пересекающихся прямых*);
6) $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$, $a \geqslant 1$ (*пара мнимых пересекающихся прямых*);
7) $x^2 = a^2$, $a > 0$ (*пара параллельных прямых*);
8) $x^2 = -a^2$, $a > 0$ (*пара мнимых параллельных прямых*);

9) $x^2 = 0$ (*пара совпадающих прямых*).

Схема доказательства. Перебор случаев. $\square$

Теорема 25.2 (Метрическая классификация поверхностей второго порядка)**.** *Всякая поверхность второго порядка ортогональной заменой координат приводится к одному и только одному из перечисленных ниже видов, причем при единственном значении указанных параметров*:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a \geqslant b \geqslant c > 0$ (*эллипсоид*);
2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $a \geqslant b \geqslant c > 0$ (*мнимый эллипсоид*);
3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a \geqslant b > 0$, $c > 0$ (*однополостный гиперболоид*);
4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $a \geqslant b > 0$, $c > 0$ (*двуполостный гиперболоид*);
5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$, $a \geqslant b > 0$ (*действительный конус*);
6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + z^2 = 0$, $a \geqslant b > 0$ (*мнимый конус*);
7) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$, $p \geqslant q > 0$ (*эллиптический параболоид*);
8) $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$, $p \geqslant q > 0$ (*гиперболический параболоид*);
9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b > 0$ (*эллиптический цилиндр*);
10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, $a \geqslant b > 0$ (*мнимый эллиптический цилиндр*);
11) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ (*гиперболический цилиндр*);
12) $y^2 = 2px$, $p > 0$ (*параболический цилиндр*);
13) $\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 0$, $a \geqslant 1$ (*пара пересекающихся плоскостей*);
14) $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$, $a \geqslant 1$ (*пара мнимых пересекающихся плоскостей*);
15) $x^2 = a^2$, $a > 0$ (*пара параллельных плоскостей*);
16) $x^2 = -a^2$, $a > 0$ (*пара мнимых параллельных плоскостей*);
17) $x^2 = 0$ (*пара совпадающих плоскостей*).

Схема доказательства. Перебор случаев. $\square$

26. Аффинная классификация кривых и поверхностей второго порядка. Индексы инерции однородного многочлена второй степени. Метод Лагранжа

Определение 26.1. Пусть f — однородный многочлен второй степени от n переменных. *Положительным* (соответственно, *отрицательным*) *индексом инерции* многочлена f называется наибольшее целое k, для которого можно найти k таких n-векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, что для любого набора чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$ значение $f(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k)$ строго положительно (соответственно, строго отрицательно).

Определение 26.2. Не нужно ли в этом определении требовать линейной независимости векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$?

Предложение 26.1. *Положительным и отрицательным индексом инерции многочлена* $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_l^2$ *являются* k *и* l *соответственно.*

Схема доказательства. Нетривиальным является только утверждение, что индексы инерции не больше этих значений. Предположим противное, например, что положительный индекс инерции больше k. Тогда найдем вектор, значение на котором данного многочлена положительно, а первые k координат нулевые. Противоречие. ☐

Теорема 26.2 (Аффинная классификация кривых второго порядка)**.** *Всякая кривая второго порядка аффинной заменой координат приводится к одному и только одному из перечисленных ниже видов:*

1) $x^2 + y^2 = 1$ (*эллипс*);
2) $x^2 + y^2 = -1$ (*мнимый эллипс*);
3) $x^2 - y^2 = 1$ (*гипербола*);
4) $y^2 = 2x$ (*парабола*);
5) $x^2 - y^2 = 0$ (*пара пересекающихся прямых*);
6) $x^2 + y^2 = 0$ (*пара мнимых пересекающихся прямых*);
7) $x^2 = 1$ (*пара параллельных прямых*);
8) $x^2 = -1$ (*пара мнимых параллельных прямых*);
9) $x^2 = 0$ (*пара совпадающих прямых*).

Схема доказательства. Для приведения к одному из указанных видов можно воспользоваться метрической классификацией, а можно применить *метод Лагранжа*, который состоит в следующем.

Пусть в общем уравнении (26) коэффициент a_{11} отличен от нуля. Тогда его можно переписать в виде

$$\pm\left(\sqrt{|a_{11}|}x + \frac{a_{12}}{\sqrt{|a_{11}|}}y + \frac{a_1}{\sqrt{|a_{11}|}}\right)^2 + p(y),$$

где p — многочлен степени не выше 2, а знак перед первым слагаемым совпадает со знаком a_{11}. Если же коэффициент a_{11} оказался равным нулю, сделаем предварительно какую-нибудь аффинную замену координат, которая это исправит (почти любая подойдет).

Перейдем в новую аффинную систему координат, в которой выражение в скобках является первой координатой, а y — второй. Переобозначим через x, y новые координаты. В зависимости от коэффициентов многочлена p уравнение в них имеет один из следующих видов:

- $\pm x^2 \pm (\alpha y + \beta)^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$;
- $\pm x^2 \pm (\alpha y + \beta) = 0$, $\alpha \neq 0$;
- $\pm x^2 + \gamma = 0$.

Переходя к аффинным координатам $x, \alpha y + \beta$ и при необходимости умножая уравнение на константу, получаем один из требуемых видов.

Невозможность привести кривую к двум разным видам из указанного списка устанавливается с помощью аффинных инвариантов, которыми являются индексы инерции квадратичной части уравнения (точнее, соответствующего многочлена) и степень вырожденности. ☐

Теорема 26.3 (Аффинная классификация поверхностей второго порядка)**.** *Всякая поверхность второго порядка аффинной заменой координат приводится к одному и только одному из перечисленных ниже видов:*

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (*эллипсоид*);
2) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ (*мнимый эллипсоид*);

3) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (*однополостный гиперболоид*);
4) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (*двуполостный гиперболоид*);
5) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (*действительный конус*);
6) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (*мнимый конус*);
7) $x^2 + y^2 = 2z$ (*эллиптический параболоид*);
8) $x^2 - y^2 = 2z$ (*гиперболический параболоид*);
9) $x^2 + y^2 = 1$ (*эллиптический цилиндр*);
10) $x^2 + y^2 = -1$ (*мнимый эллиптический цилиндр*);
11) $x^2 - y^2 = 1$ (*гиперболический цилиндр*);
12) $y^2 = 2x$ (*параболический цилиндр*);
13) $x^2 - y^2 = 0$ (*пара пересекающихся плоскостей*);
14) $x^2 + y^2 = 0$ (*пара мнимых пересекающихся плоскостей*);
15) $x^2 = 1$ (*пара параллельных плоскостей*);
16) $x^2 = -1$ (*пара мнимых параллельных плоскостей*);
17) $x^2 = 0$ (*пара совпадающих плоскостей*).

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 26.2. □

27. Частные производные и производная многочлена по направлению. Формула Тейлора для многочленов

Пусть f — многочлен от набора переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, а $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ — некоторый фиксированный вектор. Тогда результат подстановки $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}$ в f можно однозначно записать в виде

$$f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + t\,p(\boldsymbol{x}) + t^2\,q(\boldsymbol{x}, t), \tag{31}$$

где p и q — некоторые многочлены (коэффициенты которых зависят, конечно, от $\boldsymbol{v}$).

Определение 27.1. Коэффициент $p(\boldsymbol{x})$ при t в разложении (31) называется *производной многочлена f в точке $\boldsymbol{x}$ по направлению вектора $\boldsymbol{v}$* и обозначается через $\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x})$ (соответственно, сам многочлен p обозначается через $\partial_{\boldsymbol{v}} f$).

Контрольный вопрос 27.1. Если многочлен f имеет степень m, какую степень может иметь многочлен $\partial_{\boldsymbol{v}} f$?

Предложение 27.1. *Для любых двух многочленов $f(\boldsymbol{x})$ и $g(\boldsymbol{x})$ от n переменных и любого n-вектора выполняется* правило Лейбница*:*

$$\partial_{\boldsymbol{v}}(fg) = \partial_{\boldsymbol{v}} f \cdot g + f \cdot \partial_{\boldsymbol{v}} g.$$

Схема доказательства. Непосредственно из определения. □

Предложение 27.2. *Сопоставление многочлену f и вектору $\boldsymbol{v}$ многочлена $\partial_{\boldsymbol{v}} f$ линейно как по f, так и по $\boldsymbol{v}$.*

Схема доказательства. Линейность по f и однородность первой степени по $\boldsymbol{v}$ очевидны из определения. Аддитивность по $\boldsymbol{v}$ устанавливается индукцией по степени с помощью правила Лейбница. □

Определение 27.2. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис, соответствующий системе координат $x_1, \ldots, x_n$. Производная $\partial_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x})$ многочлена f по направлению $\boldsymbol{e}_i$ в точке $\boldsymbol{x}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *частной производной* многочлена f в точке $\boldsymbol{x}$ и обозначается через $\partial_i f(\boldsymbol{x})$ (а также $\partial f/\partial x_i(\boldsymbol{x})$).

Из свойства линейности $\partial_{\boldsymbol{v}} f$ по $\boldsymbol{v}$ вытекает следующее.

Следствие 27.3. *Имеет место тождество*

$$\partial_{\boldsymbol{v}} f = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \partial_i f.$$

Предложение 27.4. *Дифференцирования по направлениям двух векторов коммутируют:*

$$\partial_{\boldsymbol{u}}(\partial_{\boldsymbol{v}} f) = \partial_{\boldsymbol{v}}(\partial_{\boldsymbol{u}} f) \tag{32}$$

для любого многочлена f и любых векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Схема доказательства. Обе части равенства (32) равны коэффициенту при произведении st в разложении $f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v})$ по степеням s и t. □

Теорема 27.5 (Формула Тейлора для многочлена)**.** *Для любого многочлена $f(\boldsymbol{x})$ от $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ степени k и произвольной точки $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ имеет место тождество*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \left((\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_m} f)(\boldsymbol{a}) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_m} - a_{i_m}) \right) \right).$$

Схема доказательства. Сначала сведем к частному случаю $\boldsymbol{a} = (0, \ldots, 0)$. Докажем формулу для одного монома и воспользуемся линейностью правой части по f. □

28. Асимптотические направления кривых и поверхностей второго порядка, их геометрический смысл

Предложение 28.1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен k-й степени, а ℓ — некоторая прямая в n-мерном пространстве. Если ограничение f на ℓ является многочленом степени меньше k, то это верно и для любой прямой, параллельной ℓ.*

Схема доказательства. Утверждение следует из того, что для любого фиксированного вектора $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ многочлен $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, является многочленом степени меньше k. Достаточно проверить, что это верно для произвольного монома. □

Определение 28.1. Пусть f — многочлен от n переменных. Говорят, что вектор $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ имеет *асимптотическое направление* для алгебраической кривой, заданной уравнением $f = 0$, если ограничение f на прямые с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ имеет меньшую степень, чем f.

Контрольный вопрос 28.1. Зависит ли определение асимптотического направления от выбора аффинной системы координат?

Предложение 28.2. *Вектор $\boldsymbol{v}$ имеет асимптотическое направление для многочлена f степени n тогда и только тогда, когда $\partial_{\boldsymbol{v}}^n f = 0$.*

Схема доказательства. Убедимся, что дифференцирование по направлению вектора $\boldsymbol{v}$ для ограничения многочлена f на прямую с базисным вектором $\boldsymbol{v}$ превращается в обычное дифференцирование. □

Предложение 28.3. *Для кривой (или поверхности) второго порядка с матрицей квадратичной части Q (в некоторой фиксированной аффинной системе координат) условие, что вектор $\boldsymbol{a}$ (записанный как столбец своих координат) имеет асимптотическое направление, выражается следующим образом:*

$$\boldsymbol{a}^\top Q \boldsymbol{a} = 0.$$

Схема доказательства. Простая подстановка точки параметризованной прямой в уравнение кривой или поверхности. □

Прямые неасимптотического направления пересекают соответствующую кривую или поверхность второго порядка либо ровно в двух точках (которые могут совпасть), либо ровно в двух «мнимых точках».

Прямые асимптотического направления либо пересекают соответствующую кривую или поверхность второго порядка ровно в одной точке, либо не пересекают вовсе, либо целиком в ней содержатся.

Контрольный вопрос 28.2. Для всех типов кривых и поверхностей второго порядка описать все асимптотические направления и выяснить, для каких асимптотических направлений какие случаи пересечения реализуются.

29. Диаметры кривых и диаметральные плоскости поверхностей второго порядка, их уравнения и геометрический смысл. Сопряженные направления

Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор неасимптотического направления для кривой (или поверхности) второго порядка, заданной уравнением $F(x,y)=0$ (или $F(x,y,z)=0$). Тогда на каждой прямой ℓ с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ имеется ровно одна точка P экстремума ограничения многочлена F на ℓ. В случае, когда ℓ пересекает данную кривую (или поверхность) в двух действительных точках, точка P является серединой отрезка между этими точками, то есть *серединой хорды*, лежащей на прямой ℓ. Мы будем использовать для точки P термин «середина хорды» даже в том случае, когда пересечение прямой ℓ с данной кривой (или поверхностью) пусто. Тогда будет иметь место следующее утверждение.

Теорема 29.1. *Пусть Γ — кривая (или поверхность) второго порядка, а $\boldsymbol{a}$ — вектор неасимптотического направления для нее. Тогда множество середин хорд направления $\boldsymbol{a}$ является прямой (соответственно, плоскостью).*

Схема доказательства. Без ограничения общности можем считать, что $\boldsymbol{a}$ является первым базисным вектором аффинной системы координат x,y (соответственно, x,y,z). Уравнение, задающее Γ, имеет вид

$$a_{11}x^2+px+q,$$

где p — многочлен не выше первой, а q — не выше второй степени от y (соответственно, от y,z), причем $a_{11}\neq 0$, так как направление первого базисного вектора не асимптотическое.

Множество середин хорд задается уравнением

$$x+\frac{p(y)}{2a_{11}}=0,\quad (\text{или } x+\frac{p(y,z)}{2a_{11}}=0),$$

что является уравнением первого порядка. □

Определение 29.1. Прямая или плоскость, образованная серединами хорд в теореме 29.1, называется *диаметром* или, соответственно, *диаметральной плоскостью* данной кривой или поверхности, *сопряженной направлению вектора* $\boldsymbol{a}$.

Предложение 29.2. *Пусть многочлен F, задающий кривую или поверхность второго порядка, имеет в данной аффинной системе координат матрицу коэффициентов $\widehat{Q}$, и пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор неасимптотического направления. Тогда сопряженный направлению $\boldsymbol{a}$ диаметр (или диаметральная плоскость) задается уравнением*

$$\widehat{\boldsymbol{a}}^\top\widehat{Q}\widehat{\boldsymbol{x}}=0, \tag{33}$$

где $\widehat{\boldsymbol{a}}$ — столбец координат вектора $\boldsymbol{a}$, дополненный снизу нулем, а $\widehat{\boldsymbol{x}}$ — столбец переменных, дополненный снизу единицей. Уравнение (33) равносильно следующему:

$$\partial_{\boldsymbol{a}}F(\boldsymbol{x})=0.$$

Схема доказательства. Диаметр (диаметральная плоскость) состоит из таких точек $\boldsymbol{x}$, что $F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})=F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$. Это равенство равносильно (33). □

Определение 29.2. Пусть $F = 0$ — уравнение кривой или поверхности второго порядка, а $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — два вектора. Говорят, что $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ *сопряжены* относительно данной кривой (поверхности), если $\partial_{\boldsymbol{u}}\partial_{\boldsymbol{v}}F = 0$ (эта производная постоянна!).

Предложение 29.3. *В произвольной аффинной системе координат условие сопряженности векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, представленных столбцами своих координат, относительно кривой или поверхности второго порядка с матрицей Q квадратичной части уравнения равносильно следующему:*

$$\boldsymbol{u}^\top Q\boldsymbol{v} = 0.$$

Схема доказательства. Простая подстановка. □

Предложение 29.4. *Пусть $\boldsymbol{u}$ — вектор неасимптотического направления для кривой или поверхности второго порядка Γ. Тогда для произвольного вектора $\boldsymbol{v}$ следующие условия равносильны:*

1) *векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ сопряжены;*
2) *вектор $\boldsymbol{v}$ параллелен диаметру (диаметральной плоскости), сопряженному вектору $\boldsymbol{u}$.*

Схема доказательства. Используем условие параллельности вектора и прямой (плоскости) из предложения 15.3 (или 15.4). □

30. Главные направления, оси симметрии кривых и плоскости симметрии поверхностей второго порядка

Определение 30.1. Направление ненулевого вектора $\boldsymbol{v}$ называется *главным направлением* данной кривой (поверхности) второго порядка, если оно:

1) не является асимптотическим;
2) ортогонально сопряженному ему диаметру (сопряженной диаметральной плоскости).

Соответствующий такому направлению диаметр (диаметральная плоскость) также называется главным.

Предложение 30.1. *Главные диаметры кривой второго порядка являются ее осями симметрии.*

Главные диаметральные плоскости поверхности второго порядка являются ее плоскостями симметрии.

Схема доказательства. Выберем прямоугольную систему координат x, y (x, y, z), в которой данный главный диаметр (диаметральная плоскость) задается уравнением $x = 0$, и обнаружим из условия сопряженности первому базисному вектору, что x в уравнение данной кривой (поверхонсти) входит только в степенях ноль и два. □

Контрольный вопрос 30.1. Верно ли обратное, а именно, что любая ось симметрии кривой второго порядка или плоскость симметрии поверхности второго порядка является главным диаметром или главной диаметральной плоскостью соответственно?

Определение 30.2. Пусть A — матрица размера $n \times n$. Вектор $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}^\top$ называется *собственным вектором* матрицы A, если вектор $A\boldsymbol{v}$ ему коллинеарен, то есть существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Это число λ называется *собственным значением* матрицы A, соответствующим вектору $\boldsymbol{v}$.

Предложение 30.2. *Пусть Q — матрица квадратичной части многочлена, задающего кривую (поверхность) Γ второго порядка в некоторой прямоугольной системе координат. Тогда вектор $\boldsymbol{v}$, представленный столбцом своих координат в этой же системе, является вектором главного направления для Γ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v}$ является собственным для матрицы Q, а соответствующее собственное значение отлично от нуля.*

Схема доказательства. Если $Q\boldsymbol{v} = 0$, то вектор $\boldsymbol{v}$ имеет асимптотическое направление.

Если вектор $\boldsymbol{v}$ имеет неасимптотическое направление, то нормаль к сопряженному ему диаметру (диаметральной плоскости) есть $Q\boldsymbol{v}$, откуда условие, что диаметр (диаметральная плоскость) является главным, равносильно коллинеарности векторов $Q\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}$. □

Предложение 30.3. *Пусть Q — матрица квадратичной части многочлена, задающего кривую (поверхность) Γ второго порядка в некоторой аффинной системе координат, а G — матрица Грама соответствующего базиса. Тогда вектор $\boldsymbol{v}$, представленный столбцом своих координат в этой же системе, является вектором главного направления для Γ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v}$ является собственным для матрицы $G^{-1}Q$, а соответствующее собственное значение отлично от нуля.*

Схема доказательства. Действуем аналогично доказательству предложения 30.2. Теперь вектор нормали к диаметральной плоскости есть $G^{-1}Q\boldsymbol{v}$. □

31. Центры кривых и поверхностей второго порядка. Уравнения центров и связь с диаметрами

Определение 31.1. Для произвольного алгебраического уравнения $F(\boldsymbol{x}) = 0$ будем называть точку P его *центром симметрии*, если уравнения $F(P + \boldsymbol{v}) = 0$ и $F(P - \boldsymbol{v}) = 0$ эквивалентны (то есть отличаются ненулевым множителем).

Предложение 31.1. *Точка P является центром симметрии уравнения $F(\boldsymbol{x}) = 0$ тогда и тольк тогда, когда многочлен $F(P + \boldsymbol{v})$ от координат вектора $\boldsymbol{v}$ либо четен, либо нечетен.*

Схема доказательства. Мы должны иметь $F(P + \boldsymbol{v}) = \lambda F(P - \boldsymbol{v})$, откуда $\lambda^2 = 1$. □

Предложение 31.2. *Пусть F — многочлен второй степени. Точка P является его центром симметрии тогда и только тогда все первые частные производные F в P равны нулю.*

Схема доказательства. Перенесем в P начало отсчета. Многочлен второй степени не может быть нечетным, значит, относительно P он четный. Это значит, что линейных членов в нем нет. □

Предложение 31.3. *Если кривая (поверхность) второго порядка, заданная уравнением $F = 0$, содержит более одной точки, то множество ее центров симметрии как множества точек совпадает с множеством центров симметрии ее уравнения.*

Схема доказательства. Покажем, что два уравнения второго порядка, задающее одно и то же множество из более чем одной точки, пропорциональны. □

По умолчанию под *центром* кривой или поверхности второго порядка мы понимаем центр симметрии уравнения.

Предложение 31.4. *Пусть кривая (поверхность) Γ второго порядка задана в некоторой аффинной системе координат уравнением $F = 0$ с матрицей коэффициентов $\widehat{Q}$. Тогда множество центров Γ задается системой уравнений, которая получается из $\widehat{Q}\boldsymbol{x} = 0$ вычеркиванием последнего уравнения.*

Схема доказательства. Эти уравнения в точности означают равенство нулю первых частных производных. □

Следствие 31.5. *Всякий центр кривой (поверхности) второго порядка лежит на всяком ее диаметре (во всякой ее диаметральной плоскости).*

Следствие 31.6. *Множество центров кривой второго порядка является одним из следующих:*

- *пустым;*

- *множеством из одной точки (в этом случае кривая называется* центральной);
- *прямой.*

Множество центров поверхности второго порядка является одним из следующих:

- *пустым;*
- *множеством из одной точки (в этом случае поверхность называется* центральной);
- *прямой;*
- *плоскостью.*

32. Особые точки кривых и поверхностей второго порядка. Касательные к кривым и касательные плоскости к поверхностям второго порядка

Определение 32.1. Пусть F — произвольный многочлен. Точка, в которой F обращается в нуль, называется *особой точкой* алгебраической кривой (поверхности) $F = 0$, если все первые частные производные F в этой точке также обращаются в нуль.

Контрольный вопрос 32.1. Кривые и поверхности каких порядков могут иметь особые точки?

Контрольный вопрос 32.2. Пусть $f(x)$ — многочлен от одной переменной. Что означает, что его корень является особой точкой для уравнения $f(x) = 0$?

Предложение 32.1. *Пусть (x_0, y_0) — неособая точка алгебраической кривой $f(x, y) = 0$. Тогда уравнение*

$$\partial_{(x-x_0,y-y_0)} f(x_0, y_0) = 0$$

относительно x, y задает прямую, которая является единственной прямой ℓ, проходящей через точку (x_0, y_0) и такой, что (x_0, y_0) является особой точкой для ограничения уравнения $f = 0$ на ℓ.

Схема доказательства. Следует непосредственно из определений. □

Предложение 32.2. *Пусть (x_0, y_0, z_0) — неособая точка алгебраической поверхности $f(x, y, z) = 0$. Тогда уравнение*

$$\partial_{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

задает плоскость, которая является единственной плоскостью Π, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и такой, что (x_0, y_0, z_0) является особой точкой для ограничения уравнения $f = 0$ на Π. Плоскость Π является также объединением всех прямых ℓ, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0), ограничение уравнения $f = 0$ на которые имеет (x_0, y_0, z_0) своей особой точкой.

Схема доказательства. Непосредственно из определений. □

Определение 32.2. Прямая, указанная в предложении 32.1, называется *касательной прямой* к алгебраической кривой $f = 0$ в точке (x_0, y_0).

Плоскость, указанная в предложении 32.2, называется *касательной плоскостью* к алгебраической поверхности $f = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Предложение 32.3. *В произвольной аффинной системе координат касательная прямая (плоскость) к кривой (поверхности) второго порядка в точке $\boldsymbol{x}_0$ задается уравнением*

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_0^\top \widehat{Q} \widehat{\boldsymbol{x}} = 0,$$

где $\widehat{Q}$ — матрица коэффициентов данной кривой (поверхности), а $\widehat{\boldsymbol{x}}_0$ и $\widehat{\boldsymbol{x}}$ — это столбцы координат точки $\boldsymbol{x}_0$ и неизвестной точки $\boldsymbol{x}$, дополненные снизу единицей.

Схема доказательства. Прямая подстановка с использованием того факта, что $\widehat{\boldsymbol{x}}_0^\top \widehat{Q} \widehat{\boldsymbol{x}}_0 = 0$. □

33. Сечение поверхности касательной плоскостью. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка

Предложение 33.1. *Касательная плоскость к поверхности второго порядка либо пересекает ее по паре прямых (действительных пересекающихся, мнимых пересекающихся, или же совпадающих), либо целиком в ней содержится.*

Схема доказательства. Если пересечение не является всей касательной плоскостью, то оно должно быть особой кривой второго порядка. К таковым относятся только пары прямых. □

Контрольный вопрос 33.1. Касательные плоскости к каким поверхностям пересекают эти поверхности по паре совпадающих прямых?

Определение 33.1. Прямая, целиком содержащаяся в поверхности второго порядка, называется *образующей* этой поверхности.

Предложение 33.2. *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две его образующие. Все эти образующие можно разбить на два семейства так, чтобы любые две образующие из одного семейства скрещивались, а любые две образующие из разных семейств лежали в одной плоскости.*

Схема доказательства. Поскольку утверждение относится к аффинной геометрии, без ограничения общности можем считать, что гиперболоид задан уравнением $x^2+y^2-z^2=1$. Перепишем его в виде

$$\begin{vmatrix} x-z & 1-y \\ 1+y & x+z \end{vmatrix} = 0.$$

Если (x_0, y_0, z_0) — точка гиперболоида, то для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ выполнено

$$\begin{pmatrix} x_0-z_0 & 1-y_0 \\ 1+y_0 & x_0+z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Образующая первого семейства, проходящая через (x_0, y_0, z_0), задается системой

$$\begin{vmatrix} x-z & 1-y \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ 1+y & x+z \end{vmatrix},$$

а второго — системой

$$\begin{vmatrix} x-z & \alpha \\ 1+y & \beta \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \alpha & 1-y \\ \beta & x+z \end{vmatrix}.$$

Дальнейшее проверяется непосредственно. □

Контрольный вопрос 33.2. Могут ли две образующие однополостного гиперболоида быть параллельны?

Предложение 33.3. *Через каждую точку гиперболического параболоида проходят две его образующие. Все эти образующие можно разбить на два семейства так, чтобы любые две образующие одного семейства скрещивались, а две образующие из разных семейств пересекались.*

Схема доказательства. Перепишем уравнение $x^2-y^2=2z$ в виде

$$\begin{vmatrix} x-y & 2 \\ z & x+y \end{vmatrix} = 0.$$

Далее действуем аналогично доказательству предложения 33.2. □

Контрольный вопрос 33.3. Для любого ли асимптотического направления гиперболического параболоида найдется его образующая с таким направлением?

34. Единственность кривой второго порядка, проходящей через пять точек. Теорема Паскаля

Теорема 34.1. *Пусть $P_1, \dots, P_5$ — пять точек на плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Тогда существует ровно одна проходящая через них кривая второго порядка.*

Схема доказательства. Для многочлена f условие $f(P) = 0$, где P — некоторая точка, является линейным однородным уравнением на коэффициенты. У многочлена второй степени от двух переменных шесть независимых коэффициентов. Условие прохождения через пять точек дает систему из пяти однородных линейных уравнений, решение которой единственно с точностью до пропорциональности, если уравнения линейно независимы. Линейная независимость уравнений геометрически означает, что прохождение кривой второго порядка через четыре из пяти данных точек не обязывает ее проходить через пятую. □

Будем говорить, что конечный набор точек находится *в общем положении*, если никакие два различные отрезка, соединяющие эти точки, не параллельны.

Теорема 34.2 (теорема Паскаля)**.** *Пусть $P_1, \dots, P_6$ — набор попарно различных точек в общем положении, лежащих на одной кривой второго порядка. Тогда точки $P_1P_2 \cap P_4P_5$, $P_2P_3 \cap P_5P_6$ и $P_3P_4 \cap P_6P_1$ лежат на одной прямой.*

Схема доказательства. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 34.3. *Пусть алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$ содержит прямую $f(x, y) = 0$, где f — многочлен первой степени. Тогда F делится на f.*

Схема доказательства. Достаточно доказать в частном случае, когда $f(x, y) = x$. □

Вернемся к теореме Паскаля. Обозначим через Q, R, S точки $P_1P_2 \cap P_4P_5$, $P_2P_3 \cap P_5P_6$ и $P_3P_4 \cap QR$ соответственно, а через P_6' точку $P_5R \cap P_1S$ и докажем, что $P_6 = P_6'$ (случай, когда какие-то из указанных точек пересечения отсутствуют из-за параллельности соответствующих прямых оставляется читателю).

Пусть $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ — такие многочлены третей степени, что уравнения $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ задают объединения прямых $P_1P_2 \cup P_2P_3 \cup P_3P_4$ и $P_4P_5 \cup P_5R \cup P_1P_6'$ соответственно. Тогда ограничения этих многочленов на прямую QR имеют совпадающие наборы корней, соответствующих точкам Q, R, S, а значит, совпадают с точностью до множителя. Без ограничения общности можем считать, что многочлен $F_1 - F_2$ тождественно равен нулю на прямой QR. По лемме 34.3 многочлен $F_1 - F_2$ делится на многочлен первой степени f, задающий прямую QR. Частное $p = (F_1 - F_2)/f$ является многочленом второй степени, задающим кривую второго порядка, проходящую через $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6'$. Эта кривая совпадает с исходной, так как проходит через точки $P_1, \dots, P_5$. Прямая P_5P_6 пересекает ее в точках P_5, P_6, P_6', откуда $P_6 = P_6'$. □

35. Сопряженность точек относительно кривой второго порядка. Поляра точки и полюс прямой относительно коники. Построение поляры одной линейкой. Теорема Брианшона

Предложение 35.1. *Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — многочлен второй степени от n переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда существует, и притом единственный, многочлен $B_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ от $2n$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ со следующими свойствами:*

1) *по каждому из наборов переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ многочлен B_f имеет степень один;*
2) *многочлен $B_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ симметричен по перестановке $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, т.е. имеет место тождество $B_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B_f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;*
3) *имеет место тождество $B_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$.*

А именно, этот многочлен есть

$$B_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \widehat{\boldsymbol{x}}^\top \widehat{Q} \widehat{\boldsymbol{y}},$$

где $\widehat{Q}$ — матрица коэффициентов многочлена f, а $\widehat{\boldsymbol{x}}$ и $\widehat{\boldsymbol{y}}$ — столбцы координат $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, дополненные снизу единицей.

Схема доказательства. Из первых двух условий следует, что многочлен $B_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ должен иметь вид $\widehat{\boldsymbol{x}}^\top A \widehat{\boldsymbol{y}}$, где A — некоторая симметричная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$. Из третьего условия получаем, что матрица A должна совпадать с матрицей коэффициентов многочлена f. □

Определение 35.1. Точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ плоскости (или пространства) называются *сопряженными* относительно кривой (или, соответственно, поверхности) второго порядка, заданной уравнением $f = 0$, если $B_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Контрольный вопрос 35.1. Зависит ли это определение от выбора аффинной системы координат?

Контрольный вопрос 35.2. Пусть Γ — сечение конуса второго порядка Σ некоторой плоскостью Π, не проходящей через вершину O конуса Σ. Покажите, что сопряженность точек $A, B \in \Pi$ относительно Γ равносильна сопряженности векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ относительно Σ.

Предложение 35.2. *Пусть Γ — кривая второго порядка. Если точка P не является центром Γ, то множество точек, сопряженных точке P, образует прямую.*

Если P является центром Γ, но не принадлежит Γ, то множество точек, сопряженных P, пусто.

Если P является особой точкой Γ, то множество точек, сопряженных P, есть вся плоскость.

Схема доказательства. Простая проверка. □

Контрольный вопрос 35.3. Сформулировать аналог этого утверждения для поверхностей второго порядка.

Определение 35.2. Пусть Γ — некоторая коника, а P — произвольная точка плоскости, не являющаяся центром Γ. Прямая ℓ, состоящая из точек, сопряженных точке P, называется *полярой* точки P *относительно* Γ, а точка P называется *полюсом* прямой ℓ *относительно* Γ.

Контрольный вопрос 35.4. Что является полярой неособой точки кривой второго порядка относительно этой кривой?

Контрольный вопрос 35.5. Пусть точка P движется по прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{v}$. К чему стремится поляра точки P, когда P «уходит в бесконечность»?

Предложение 35.3. *Пусть точки A, B, C, D лежат на конике Γ и находятся в общем положении. Тогда точки $P = AB \cap CD$ и $S = AC \cap BD$ сопряжены относительно Γ.*

Схема доказательства. Из предложения 35.2 следует, что точки P и S сопряжены относительно кривых второго порядка $AB \cup CD$ и $AC \cup BD$. Условие сопряженности фиксированных точек относительно кривой второго порядка линейно по многочлену, стоящему в уравнении этой кривой. Поэтому P и S сопряжены относительно любой кривой второго порядка, уравнение которой является линейной комбинацией уравнений $AB \cup CD$ и $AC \cup BD$. Этим свойством обладает любая кривая второго порядка, проходящая через точки A, B, C, D, так как прохождение через эти четыре точки дает четыре линейно независимые условия на шесть коэффициентов многочлена второй степени, задающего кривую. □

Из предложения 35.3 вытекает следующий способ построения поляры произвольной точки P относительно произвольной коники Γ. Проведем через P две прямые, пересекающие Γ в паре точек каждая. Пусть AB и CD — соответствующие хорды. Полярой точки P является прямая, проходящая через точки $AC \cap BD$ и $AD \cap BC$.

Контрольный вопрос 35.6. Предложить способ построения касательной к конике из данной точки с помощью одной линейки.

Будем говорить, что *многоугольник* $P_1P_2\dots P_k$ *описан около коники* Γ, если все прямые P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$, P_nP_1 касаются Γ.

Теорема 35.4 (Брианшона). *Пусть шестиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ описан около некоторой коники. Тогда прямые P_1P_4, P_2P_5 и P_3P_6 принадлежат одному пучку.*

Схема доказательства. Пусть Γ — данная коника. Из определения полюса и поляры следует, что для любых двух различных точек A и B, для которых определена поляра относительно Γ, полюс прямой AB, если он есть, совпадает с точкой пересечения поляр точек A и B. С помощью этого факта теорема Брианшона выводится из теоремы Паскаля (и наоборот). $\square$

36. Плоские сечения поверхности второго порядка. Общий вид поверхности с данным сечением. Нахождение ортогональных инвариантов сечения по уравнениям поверхности и плоскости

Пусть $F(x, y, z) = 0$ — уравнение алгебраической поверхности, а Π — некоторая плоскость. Под *сечением* данной поверхности плоскостью Π будем понимать алгебраическую кривую, заданную в Π уравнением $F|_\Pi = 0$, где $F|_\Pi$ — ограничение многочлена F на плоскость Π.

Предложение 36.1. *Сечение алгебраической поверхности k-го порядка является алгебраической кривой порядка не выше k.*

Схема доказательства. Очевидно. $\square$

Предложение 36.2. *Пусть поверхность Σ второго порядка задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, а плоскость Π — уравнением $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Тогда любая другая поверхность второго порядка, имеющая то же сечение плоскостью Π, что и Σ, задается уравнением вида*

$$F(x, y, z) + (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0.$$

Схема доказательства. Пусть $F_1(x, y, z) = 0$ — уравнение другой поверхности второго порядка с тем же сечением плоскостью Π, что и Σ. Тогда ограничения $F_1|_\Pi$ и $F|_\Pi$ пропорциональны. Следовательно, при некотором $\lambda \neq 0$ разность $\lambda F_1 - F$ делится на $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$. $\square$

Предложение 36.3. *Пусть поверхность второго порядка задана уравнением*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + p(x, y, z) = 0,$$

где $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, $\lambda_2 \neq 0$, а p — многочлен не более чем первой первой степени. Тогда плоскости, сечение которыми данной поверхности является окружностью (действительной, мнимой или выроженной в точку) образует два несобственных пучка плоскостей $\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\, x \pm \sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}\, z + \delta = 0$, $\delta \in \mathbb{R}$.

Схема доказательства. Пусть плоскость $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ пересекает данную поверхность по окружности. Тогда найдется сфера с таким же сечением. Следовательно, можно подобрать такие $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, чтобы уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + p(x, y, z) + (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0$$

имело квадратичную часть вида $\mu \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$. Это возможно, только если данная плоскость принадлежит одному из указанных пучков. $\square$

Контрольный вопрос 36.1. Какие кривые получатся в сечении, если в условиях предложения 36.3 положить $\lambda_2 = 0$?

Предложение 36.4. *Пусть поверхность Σ второго порядка задана в прямоугольной системе координат уравнением $F(x,y,z)=0$ с матрицей коэффициентов $\widehat{Q}$ и матрицей квадратичной части Q, а плоскость Π — уравнением $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. Обозначим через $\widehat{M}$ и M следующие матрицы:*

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} & & & & \alpha \\ & \widehat{Q} & & & \beta \\ & & & & \gamma \\ & & & & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} & & & \alpha \\ & Q & & \beta \\ & & & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть в плоскости Π задана прямоугольная система с началом отсчета в точке, являющейся ортогональной проекцией начала отсчета в объемлющем пространстве, и в этой системе ограничение $F|_\Pi$ имеет матрицу коэффициентов $\widehat{S}$ и матрицу квадратичной части S. Тогда

$$\chi_S(\lambda) = -\frac{\chi_M(\lambda)+\lambda\chi_Q(\lambda)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

$$\chi_{\widehat{S}}(\lambda) = -\frac{\chi_{\widehat{M}}(\lambda)+\lambda\chi_{\widehat{Q}}(\lambda)-\delta^2\lambda\chi_S(\lambda)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Схема доказательства. Все вовлеченные в эти формулы характеристические многочлены, а также величина $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ сохраняются при ортогональных заменах координат с сохранением начала отсчета, поэтому задача сводится к частному случаю, в котором $\beta=\gamma=0$, а сечение приведено к каноническому виду. ☐

Контрольный вопрос 36.2. Каков геометрический смысл условия $\det\widehat{M}=0$?

37. Стереографическая проекция сферы и двуполостного гиперболоида вращения. Образы плоских сечений при стереографической проекции

В этом параграфе Σ — это либо сфера $x^2+y^2+z^2=1$, либо двуполостный гиперболоид вращения $x^2+y^2-z^2=-1$.

Определение 37.1. *Стереографической проекцией* поверхности Σ называется ее центральная проекция из точки $(0,0,-1)$ на плоскость $z=0$.

Контрольный вопрос 37.1. Написать явные формулы для самой стереографической проекции и для обратного к ней отображения.

Теорема 37.1. *Образ каждого непустого плоского сечения поверхности Σ есть либо окружность (возможно, мнимая или вырожденная в точку), либо прямая.*

Схема доказательства. Пусть $\epsilon=1$ в случае сферы и $\epsilon=-1$ в случае гиперболоида. Пусть плоскость Π задается уравнением $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. Если она проходит через точку $(0,0,-1)$, то стереографическая проекция сечения является прямой (если оно непусто). Предположим обратное, то есть $\gamma\neq\delta$.

Поверхность

$$x^2+y^2+\epsilon\Big(z^2-1+2\,\frac{z+1}{\delta-\gamma}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\Big)=0$$

содержит сечение Σ плоскостью Π и имеет особенность в точке $(0,0,-1)$, а значит, является конусом с направляющей $\Sigma\cap\Pi$. Ее сечение плоскостью $z=0$ и будет стереографической проекцией сечения. Это сечение задается уравнением

$$x^2+y^2+\epsilon\Big(-1+2\,\frac{\alpha x+\beta y+\delta}{\delta-\gamma}\Big)=0,$$

откуда оно является окружностью. ☐

Теорема 37.2. *Стереографическая проекция сферы на плоскость сохраняет углы пересечения между окружностями.*

Схема доказательства. Пусть две окружности на сфере $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ пересеклись в точке P, и пусть $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ — направляющие векторы их касательных в этой точке. Проведем две плоскости Π_1 и Π_2 через точки P и $(0, 0, -1)$ так, что Π_1 параллельна $\boldsymbol{u}$, а Π_2 параллельна $\boldsymbol{v}$. Окружности $\Gamma_1 = \Pi_1 \cap \Sigma$ и $\Gamma_2 = \Pi_2 \cap \Sigma$ пересекутся в точке P под тем же углом, что и данные, и под тем же углом, что они же пересекутся в точке $(0, 0, -1)$. Линии пересечения Π_1 и Π_2 с плоскостью $z = 0$ параллельны касательным к Γ_1 и Γ_2 в точке $(0, 0, -1)$. $\square$

38. Определение аффинного преобразования. Запись аффинного преобразования в координатах

Определение 38.1. Пусть X — прямая, плоскость или пространство. *Аффинным преобразованием* пространства (прямой, плоскости) X называется такое взаимно однозначное отображение $f : X \to X$, что для любых трех точек A, B, C из условия, что C делит отрезок AB в некотором отношении, следует, что $f(C)$ делит отрезок $f(A)f(B)$ в том же отношении.

Теорема 38.1. *Пусть X — прямая, плоскость или пространство, и пусть $x_1, \ldots, x_k$ ($k = 1, 2, 3$) — аффинная система координат на X. Тогда любое аффинное преобразование в этой системе координат имеет вид*

$$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \tag{34}$$

где A — невырожденная матрица размера $k \times k$, $\boldsymbol{b}$ — некоторый k-столбец, а $\boldsymbol{x}$ — столбец координат произвольной точки.

Наоборот, любое отображение, имеющее вид (34)*, является аффинным преобразованием.*

Схема доказательства. По индукции устанавливаем, что для любого набора точек $P_1, \ldots, P_m$ и ненулевого набора чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ выполнено

$$f\Big(\frac{\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_m P_m}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m}\Big) = \frac{\lambda_1 f(P_1) + \ldots + \lambda_m f(P_m)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m}.$$

Если O — начало отсчета, а $P_1, \ldots, P_k$ — концы базисных векторов, то точку с координатами $(x_1, \ldots, x_k)$ можно представить как

$$x_1 P_1 + \ldots + x_k P_k + (1 - x_1 - \ldots - x_k)O.$$

В комбинации с предыдущим получаем, что аффинное преобразование f имеет вид (34), в котором $\boldsymbol{b}$ — это координаты точки $f(O)$, а в i-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\overrightarrow{f(O)f(P_i)}$, $i = 1, \ldots, k$. $\square$

Теорема 38.2. *Пусть $f : X \to X$ — некоторое отображение в себя прямой, плоскости или пространства, и пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая аффинная система координат на X. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *f является аффинным преобразованием*;
2) *найдется такая аффинная система координат $\mathfrak{Y}$ на X, что любая точка P имеет такие же координаты в системе $\mathfrak{X}$, что и ее образ $f(P)$ в системе $\mathfrak{Y}$.*

Схема доказательства. Используем общий вид аффинного преобразования и общий вид аффинной замены координат (теорема 19.1). $\square$

Теорема 38.3. *Пусть X — прямая, плоскость или пространство, а $P_0, \ldots, P_k$, где $k = 1, 2, 3$ в случае прямой, плоскости и пространства соответственно, — набор попарно различных точек, которые в случае $k = 2$ не лежат на одной прямой, а в случае $k = 3$ не лежат в одной плоскости. Тогда для любых точек $P'_0, \ldots, P'_k$, удовлетворяющих тому же условию, существует ровно одно аффинное преобразование $\varphi : X \to X$, для которого $\varphi(P_i) = P'_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$.*

Схема доказательства. Используем тот факт, что при указанном условии на точки найдется ровно одна аффинная система координат, в которой точка P_0 является началом отсчета, а точки $P_1, \ldots, P_k$ являются концами базисных векторов. □

39. Изменение матрицы аффинного преобразования при переходе из одной аффинной системы координат в другую. Определитель матрицы аффинного преобразования

Матрица A в формуле (34) называется *матрицей* данного *аффинного преобразования.* Нам будет удобно также пользоваться *расширенной матрицей*

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение 39.1. *Пусть f — аффинное преобразование с матрицей A, и пусть $\boldsymbol{v}$ — столбец координат вектора $\overrightarrow{BC}$. Тогда вектор $\overrightarrow{f(B)f(C)}$ имеет столбец координат $A\boldsymbol{v}$.*

Схема доказательства. Применяем (34). □

Предложение 39.2. *Пусть аффинные системы координат $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ связаны заменой*

$$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0,$$

где $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix}^\top$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_k \end{pmatrix}^\top$, и пусть f — некоторое аффинное преобразование, которое в системе $x_1, \ldots, x_k$ имеет матрицу A и расширенную матрицу $\widehat{A}$. Тогда в системе $y_1, \ldots, y_k$ его матрица и расширенная матрица равны, соответственно

$$C^{-1}AC \quad \text{и} \quad \widehat{C}^{-1}\widehat{A}\widehat{C},$$

где

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} C & \boldsymbol{x}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Схема доказательства. Запишем тот факт, что замена координат с последующим применением аффинного преобразования должно давать тот же результат, что применение аффинного преобразования с последующей заменой координат. □

Следствие 39.3. *Определитель матрицы аффинного преобразования не зависит от выбора системы координат.*

Контрольный вопрос 39.1. Каков геометрический смысл определителя матрицы аффинного преобразования?

Определение 39.1. Аффинное преобразование называется *собственным*, если определитель его матрицы положителен, и *несобственным* в противном случае.

40. Изометрические преобразования. Критерии изометричности преобразования

Определение 40.1. *Изометрическим преобразованием* (или просто *изометрией*) прямой, плоскости или пространства X называется взаимно однозначное отображение $f : X \to X$, сохраняющее расстояние между точками, то есть такое, что для любых точек $B, C \in X$ выполнено $|f(B)f(C)| = |BC|$. Изометрические преобразования называются также *движениями*.

Предложение 40.1. *Любое изометрическое преобразование прямой, плоскости или пространства является аффинным преобразованием.*

Схема доказательства. Точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда некоторое неравенство треугольника для них превращается в равенство. Поэтому из сохранения расстояний следует, что прямые переходят в прямые. Также из него следует, что сохраняются отношения, в которых точки делят отрезки. $\square$

Теорема 40.2. *Пусть f — аффинное преобразование прямой, плоскости или пространства. Следующие условия равносильны*:

1) f *является изометрией*;
2) *в некоторой прямоугольной системе координат матрица преобразования f ортогональна*;
3) *в любой прямоугольной системе координат матрица преобразования f ортогональна*;
4) f *сохраняет все углы между векторами и длину какого-то одного ненулевого вектора*;
5) (*в случае плоскости*) f *переводит некоторую окружность в окружность того же радиуса*;
6) (*в случае пространства*) f *переводит некоторую сферу в сферу того же радиуса.*

Схема доказательства. Переходы 1) $\Rightarrow$ 4), 1) $\Rightarrow$ 5), 1) $\Rightarrow$ 6) и 3) $\Rightarrow$ 2) очевидны.

Пусть выполнено 2). Перейдем в прямоугольную систему координат, в которой матрица A данного преобразования ортогональна. Пусть $\boldsymbol{v}$ — столбец координат некоторого вектора. Из ортогональности матрицы A следует, что $|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$, откуда, ввиду произвольности $\boldsymbol{v}$, следует 1).

Пусть выполнено 4), и пусть $\boldsymbol{v}$ — вектор, длина которого при преобразовании f сохраняется. Из условия 4) следует, что любой треугольник, одна из сторон которого образует вектор $\boldsymbol{v}$, переходит в равный себе. Отсюда следует, что длины всех векторов сохраняются, т.е. условие 1).

Пусть выполнено 5) или 6). Тогда для некоторого r данное преобразование сохраняет длины всех векторов длины r. Ввиду аффинности преобразования оно сохраняет и длины всех остальных векторов.

Пусть выполнено 1), и A — матрица преобразования в произвольно выбранной прямоугольной системе координат. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{v}$ выполнено $|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$, то есть $\boldsymbol{v}^\top A^\top A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{v}$. Отсюда матрица A ортогональна, т.е. имеет место 3). $\square$

Контрольный вопрос 40.1. Может ли изометричное преобразование плоскости иметь матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$? А матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

41. Классификация движений плоскости. Теорема Шаля

Определение 41.1. *Поворотом плоскости* называется аффинное преобразование плоскости, которое в некоторой прямоугольной системе координат x, y имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (0, \pi].$$

Определение 41.2. *Параллельным переносом* называется аффинное преобразование, матрица которого единична.

Контрольный вопрос 41.1. Нужно ли было в этом определении оговориться о выборе системы координат?

Определение 41.3. *Скользящей симметрией* называется аффинное преобразование плоскости, которое в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ -y \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Теорема 41.1 (Шаля)**.** *Каждое нетождественное собственное движение плоскости является либо поворотом, либо параллельным переносом. Каждое несобственное движение плоскости является скользящей симметрией.*

Схема доказательства. Пусть данное движение собственное. Тогда согласно предложению 19.4 его матрица в любой прямоугольной системе координат имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Найдем неподвижную точку и поместим в нее начало отсчета. Если $\varphi \in (\pi, 2\pi) \pmod{2\pi}$, поменяем ориентацию системы координат, и φ сменит знак.

Пусть данное движение несобственное. Тогда согласно предложению 19.4 его матрица в любой прямоугольной системе координат имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Параметр φ можно менять поворотом системы координат и сделать нулем, и тогда преобразование будет иметь вид $(x, y) \mapsto (x+a, -y+b)$. Сдвигая начало отсчета, можно произвольно менять параметр b. $\square$

Контрольный вопрос 41.2. Насколько однозначно произвольная изометрия плоскости приводится к указанному в теореме 41.1 виду?

Контрольный вопрос 41.3. К какому типу движений плоскости относится композиция поворота и параллельного переноса? Поворота и скользящей симметрии? Двух скользящих симметрий?

42. Классификация движений пространства

Теорема 42.1. *Всякое собственное движение трехмерного пространства является либо параллельным переносом, либо композицией поворота вокруг некоторой оси и параллельного переноса вдоль нее, т.е. в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+a \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (0, \pi], \ a \in \mathbb{R}.$$

(*Такие преобразования называются* винтовыми вращениями.)

Всякое несобственное движение пространства является либо композицией отражения относительно некоторой плоскости и поворота вокруг некоторой прямой, ортогональной этой плоскости, т.е. в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (0, \pi],$$

либо композицией отражения относительно некоторой плоскости и параллельного переноса вдоль вектора, параллельного этой плоскости, т.е. в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y \\ -z \end{pmatrix}.$$

Схема доказательства. Сначала покажем, что определитель любой ортогональной матрицы A размера 3×3 (который равен ± 1) является ее собственным значением.

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы третий базисный вектор был собственным для данного преобразования, и соответствующее собственное число равнялось определителю матрицы данного преобразования. В этой системе преобразование будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Далее применяем теорему Шаля. $\square$

Контрольный вопрос 42.1. Насколько однозначно движение пространства приводится к одному из указанных выше видов?

43. Группа единичных кватернионов. Эпиморфизмы $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$

Группу ортогональных матриц размера $n \times n$ принято обозначать через $\mathrm{O}(n)$, а подгруппу в ней, состоящую из матриц с определителем, равным единице, через $\mathrm{SO}(n)$.

Через $\mathrm{U}(n)$ обозначают группу *унитарных* матриц размера $n \times n$ — комплексных матриц A со свойством $\overline{A}^{\top} A = E$, а через $\mathrm{SU}(n)$ — подгруппу в $\mathrm{U}(n)$, состоящую из матриц с определителем, равным единице.

Введем обозначения:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{i} = \begin{pmatrix} \mathbb{i} & 0 \\ 0 & -\mathbb{i} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{i} \\ \mathbb{i} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{i}$ — мнимая единица.

Предложение 43.1. *Имеют место равенства*

$$\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = -\mathfrak{j}\mathfrak{i} = \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{j}\mathfrak{k} = -\mathfrak{k}\mathfrak{j} = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{k}\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}\mathfrak{k} = \mathfrak{j}.$$

Схема доказательства. Простая проверка. □

Определение 43.1. *Кватернионом* называется линейная комбинация q матриц $\mathbf{1}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ с вещественными коэффициентами:

$$a\,\mathbf{1} + b\,\mathfrak{i} + c\,\mathfrak{j} + d\,\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} a + b\mathbb{i} & c + d\mathbb{i} \\ -c + d\mathbb{i} & a - b\mathbb{i} \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

При этом число a и кватернион $b\,\mathfrak{i} + c\,\mathfrak{j} + d\,\mathfrak{k}$ называются соответственно *вещественной частью* и *мнимой частью* кватерниона q и обозначаются через $\mathrm{Re}\,q$ и $\mathrm{Im}\,q$. Кватернион $(\mathrm{Re}\,q)\,\mathbf{1} - \mathrm{Im}\,q$ называется *сопряженным* к q и обозначается через q^*. Кватернион, вещественная часть которого равна нулю, называется *чисто мнимым*.

Контрольный вопрос 43.1. Как выразить операцию сопряжения в матричных терминах? Как связаны q_1^*, q_2^* и $(q_1q_2)^*$ для произвольных двух кватернионов q_1 и q_2?

Множество кватернионов обозначается через $\mathbb{H}$. Очевидно, что $\mathbb{H}$ замкнуто по отношению к сложению. Из предложения 43.1 также следует:

Следствие 43.2. *Множество кватернионов замкнуто по отношению к умножению.*

Определение 43.2. *Длиной* кватерниона q, обозначаемой $|q|$, называют $\sqrt{\det q}$ (как мы сейчас увидим, подкоренное выражение всегда вещественно и неотрицательно). Кватернион называется *единичным*, если его длина равна 1.

Предложение 43.3. *Длина кватерниона* $q = a\,\mathbf{1} + b\,\mathfrak{i} + c\,\mathfrak{j} + d\,\mathfrak{k}$ *равна* $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, *и имеет место равенство* $qq^* = |q|^2\,\mathbf{1}$. *Единичные кватернионы образуют группу* $\mathrm{SU}(2)$.

Схема доказательства. Простая проверка. □

Контрольный вопрос 43.2. Какие кватернионы обратимы по отношению к умножению? Какова формула для вычисления обратного кватерниона?

Предложение 43.4. *Пусть w — чисто мнимый кватернион, а q — ненулевой. Тогда qwq^* — также чисто мнимый кватернион.*

Схема доказательства. $(qwq^*)^* = (q^*)^* w^* q^* = -qwq^*$. □

Для произвольных единичных кватернионов q, q_1, q_2 определим матрицы A_q и A_{q_1,q_2} из равенств

$$\begin{pmatrix} q\,\mathfrak{i}\,q^* & q\,\mathfrak{j}\,q^* & q\,\mathfrak{k}\,q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \end{pmatrix} A_q, \qquad \begin{pmatrix} q_1\,\mathbf{1}\,q_2^* & q_1\,\mathfrak{i}\,q_2^* & q_1\,\mathfrak{j}\,q_2^* & q_1\,\mathfrak{k}\,q_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \end{pmatrix} A_{q_1,q_2}.$$

Предложение 43.5. *Отображения* $q \mapsto A_q$ *и* $(q_1, q_2) \mapsto A_{q_1,q_2}$ *являются эпиморфизмами групп* $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ *и* $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ *соответственно. Ядро первого эпиморфизма —* $\pm\mathbf{1}$, *а второго —* $\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Схема доказательства. Матрицы A_q и A_{q_1,q_2} являются матрицами преобразований $w \mapsto qwq^*$ и $w \mapsto q_1wq_2^*$, сохраняющих длины, откуда эти матрицы ортогональны. Равенства $A_{qq'} = A_qA_{q'}$ и $A_{q_1q_1',q_2q_2'} = A_{q_1,q_2}A_{q_1',q_2'}$ проверяются непосредственно. То, что любая матрица $A \in \mathrm{SO}(3)$ имеет вид A_q для некоторого $q \in \mathrm{SU}(2)$ выводится из теоремы 20.1 и явно вычисленного вида матриц $A_{\cos t + \sin t\, \mathfrak{k}}$ и $A_{\cos t + \sin t\, \mathfrak{i}}$.

Пусть $A \in \mathrm{SO}(4)$, и пусть $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^\top$ — ее первый столбец. Такой же первый столбец имеет матрица $A_{q,\mathbf{1}}$, где $q = a\mathbf{1} + b\mathfrak{i} + c\mathfrak{j} + d\mathfrak{k}$. Отсюда

$$A = A_{q,\mathbf{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $B \in \mathrm{SO}(3)$. Найдется $q' \in \mathrm{SU}(2)$, для которого $B = A_{q'}$. Получаем $A = A_{qq',q'}$.

Чтобы доказать, что ядра обоих гомоморфизмов состоят только из $\pm\mathbf{1}$, заметим, что равенства $qwq^* = w$ и $q_1wq_2^* = w$ выполнены для всех w, только если $q, q_1, q_2 \in \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ и $q_1 = q_2$. $\square$

Контрольный вопрос 43.3. Покажите, что $A_{\cos t + \sin t\, q}$, где q — чисто мнимый единичный кватернион является матрицей поворота вокруг q на угол $2t$.

44. Преобразования сжатия-растяжения вдоль взаимно перпендикулярных направлений и их матрицы. Строение произвольного аффинного преобразования

Определение 44.1. Аффинное преобразование плоскости или пространства называется *преобразованием сжатия–растяжения вдоль взаимно перпендикулярных осей* (сокращенно — *преобразованием сжатия–растяжения*), если в некоторой прямоугольной системе координат $x_1, \ldots, x_k$, $k = 2, 3$, оно записывается в виде $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_k x_k)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — положительные числа.

Определение 44.2. Симметричная матрица Q называется *положительной*, если однородный многочлен второй степени с такой матрицей квадратичной части положителен всюду, кроме начала координат.

Предложение 44.1. *Пусть A — матрица некоторого аффинного преобразования φ в некоторой прямоугольной системе координат. Тогда φ является преобразованием сжатия–растяжения тогда и только тогда, когда выполнены два условия*:

1) *φ имеет неподвижную точку*;
2) *матрица A симметрична и положительна.*

Схема доказательства. Наличие неподвижной точки очевидно из определения отображения сжатия–растяжения. Далее будем рассматривать только аффинные отображения с неподвижной точкой, которая будет взята за начало отсчета.

Если φ является сжатием–растяжением, то в некоторой другой прямоугольной системе координат оно имеет диагональную матрицу Λ с положительными числами на диагонали. По предложению 39.2 матрица A представляется в виде $C\Lambda C^{-1}$, где C — ортогональная матрица. Отсюда матрица A симметрична и положительна.

Если, наоборот, известно, что A симметрична и положительна, то из теоремы 23.1 и предложения 21.2 следует представимость A в виде $C\Lambda C^{-1}$, где C и Λ с теми же свойствами, как выше. $\square$

Теорема 44.2. *Любое аффинное преобразование плоскости или пространства представляется в виде композиции некоторого движения и некоторого преобразования сжатия–растяжения.*

Схема доказательства. Пусть Γ — единичная окружность в случае плоскости и единичная сфера в случае пространства, с центром в начале координат. Обозначим через φ данное преобразование. Образ $\varphi(\Gamma)$ является эллипсом или, соответственно, эллипсоидом. Применяя сжатие–растяжение вдоль главных направлений, его можно перевести в окружность или сферу радиуса 1. Затем, применяя движение, ее можно вернуть в исходное положение. $\square$

Контрольный вопрос 44.1. Насколько однозначно указанное в теореме разложение?

45. Преобразования подобия. Аффинные преобразования комплексной прямой

Определение 45.1. Аффинное преобразование φ называется *гомотетией*, если оно имеет неподвижную точку (называемую ее *центром*) и переводит любую точку P в такую точку P', что $\overrightarrow{OP'} = \lambda\overrightarrow{OP}$, где O — центр гомотетии, а λ — некоторое ненулевое число, не завиящее от P.

Определение 45.2. *Скалярной матрицей* называется диагональная квадратная матрица с равными числами на диагонали.

Предложение 45.1. *Аффинное преобразование является гомотетией тогда и только тогда, когда оно не является параллельным переносом, а его матрица скалярна.*

Схема доказательства. Сначала покажем, что преобразование имеет неподвижную точку. Далее утверждение следует из определений. $\square$

Определение 45.3. *Подобием* на плоскости или в пространстве называется взаимно однозначное отображение φ плоскости или, соответственно, пространства в себя, при котором для некоторого фиксированного $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых двух точек A и B выполнено $|\varphi(A)\varphi(B)| = \lambda\,|AB|$.

Предложение 45.2. *Пусть φ — отображение плоскости или пространства в себя. Следующие условия равносильны*:

1) *φ является подобием*;
2) *φ является композицией гомотетии и движения*;
3) *φ является аффинным преобразованием с такой матрицей A, что матрица $A^\top A$ скалярна*;
4) *φ является аффинным преобразованием, которое переводит любую пару ортогональных векторов в пару ортогональных векторов*;
5) *φ является аффинным преобразованием, которое переводит любую окружность в окружность.*

Схема доказательства. Переходы 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 1), 2) $\Rightarrow$ 3), 2) $\Rightarrow$ 4), 2) $\Rightarrow$ 5) очевидны.

Пусть выполнено 3). По диагонали $A^\top A$ стоят одинаковые положительные числа. Поделив A на корень из этих чисел, получаем ортогональную матрицу. Это влечет 2).

Из 4) следует 3), если применить условие к базисным векторам и их линейным комбинациям из двух слагаемых.

Из 5) следует 4), так как сопряженность направлений на плоскости относительно окружности означает перпендикулярность. $\square$

Предложение 45.3. *Пусть x, y — прямоугольная система координат на плоскости. Будем отождествлять точку плоскости, имеющую координаты (x, y), с комплексным числом $z = x + y\mathbb{i}$. Тогда любое преобразование подобия, сохраняющее ориентацию, будет иметь вид*

$$z \mapsto uz + w,$$

а преобразование подобия, обращающее ориентацию, — вид

$$z \mapsto u\overline{z} + w,$$

где u и w — комплексные числа, причем $u \neq 0$.

Схема доказательства. Запишем в матричном виде общие преобразования подобия и действия с комплексными числами. $\square$

46. Проективная прямая. Двойное отношение. Гармонические четверки. Дробно-линейные преобразования

Пополненной прямой будем называть дизъюнктное объединение некоторой прямой ℓ и одноэлементного множества. Добавленный элемент будет называться *несобственной* или *бесконечно удаленной точкой* соответствующей пополненной прямой и обозначаться через ∞ или ∞_ℓ.

Определение 46.1. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 — попарно различные точки пополненной прямой, на которой выбрана аффинная координата x. *Двойным отношением* (а также *отношением четырех точек* или *ангармоническим отношением*) этих точек, обозначаемым через $(P_1P_2P_3P_4)$ называется число

$$\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}, \tag{35}$$

где x_i — аффинная координата точки P_i, а в случае, когда P_i — бесконечно удаленная точка, выражение (35) следует понимать как предел при $x_i \to \infty$.

Если $(P_1P_2P_3P_4) = -1$, то четверку точек P_1, P_2, P_3, P_4 называют *гармонической*.

Контрольный вопрос 46.1. Зависит ли двойное отношение от выбора аффинной координаты на данной прямой?

Определение 46.2. *Проективной прямой* будем называть произвольное множество X вместе с определенной на множестве $\{(P_1P_2P_3P_4) \in X^4 : P_i \neq P_j \text{ при } i \neq j\}$ функцией, называемой двойным отношением, для которых существует такая биекция φ из X на некоторую пополненную прямую, что двойное отношение точек P_1, P_2, P_3, P_4 равно двойному отношению точек $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3), \varphi(P_4)$. *Аффинной координатой* на X будем называть биекцию $x : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, при которой двойное отношение вычисляется по формуле (35).

Определение 46.3. Пусть $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ — попарно различные прямые из одного собственного пучка на плоскости. Определим их двойное отношение $(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4)$ следующим образом. Выберем аффинную систему координат на плоскости, в которой ℓ_1 и ℓ_2 — оси, а ℓ_3 имеет направляющий вектор $(1,1)$. Пусть (α, β) — направляющий вектор ℓ_4. Тогда по определению $(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4) = \alpha/\beta$.

Контрольный вопрос 46.2. Корректно ли это определение?

Контрольный вопрос 46.3. Покажите, что в каждом из следующих случаев четверка прямых $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ гармоническая:

- ℓ_3 и ℓ_4 являются биссектрисами двух разных вертикальных углов, образованных прямыми ℓ_1 и ℓ_2;
- ℓ_1 и ℓ_2 содержат стороны некоторого фиксированного треугольника, ℓ_3 является содержит его медиану, проведенную к третьей стороне, а ℓ_4 параллельна третьей стороне;
- $\ell_1 = AC$, $\ell_2 = BD$, $\ell_3 = PS$, $\ell_4 = PR$, где $P = AC \cap BD$, $S = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$, а A, B, C, D — произвольные точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Предложение 46.1. *Пусть $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ — попарно различные прямые из одного собственного пучка на плоскости, и пусть m — произвольная прямая на той же плоскости, не проходящая через центр этого пучка. Тогда $(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4) = (P_1P_2P_3P_4)$, где P_i — это точка пересечения прямых ℓ_i и m, если таковая существует, и несобственная точка, если $\ell_i \parallel m$.*

Схема доказательства. Прямое вычисление с использованием согласованных систем координат на плоскости и прямой m: начало отсчета следует взять в центре пучка, а прямая m должна задаваться уравнением $y = 1$. □

Определение 46.4. *Проективным преобразованием* проективной прямой X называется взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to X$, при котором сохраняется двойное отношение, т.е. такое, что для любых попарно различных точек P_1, P_2, P_3, P_4 выполнено $(\varphi(P_1)\varphi(P_2)\varphi(P_3)\varphi(P_4)) = (P_1P_2P_3P_4)$.

Предложение 46.2. *Любое проективное преобразование проективной прямой $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ имеет вид*

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{36}$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *— некоторая невырожденная матрица, определенная отображением однозначно с точностью до множителя. Любое такое отображение является проективным преобразованием.*

Схема доказательства. Сначала заметим, что $(\infty\,0\,1\,x) = x$. Отсюда, если φ — проективное преобразование, то $\varphi(x) = (\varphi^{-1}(\infty)\,\varphi^{-1}(0)\,\varphi^{-1}(1)\,x)$. Это — дробно-линейная функция от x.

Пусть теперь $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — произвольная невырожденная матрица. Отождествим проективную прямую $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ с пополненной прямой $y = 1$ на плоскости с аффинной системой координат x, y и рассмотрим аффинное преобразование φ с матрицей A, сохраняющее начало отсчета. Пусть X — собственный пучок прямых, проходящих через начало отсчета. Преобразование φ переводит прямые из X в прямые из X и сохраняет двойное отношение, определяя таким образом проективное преобразование $X \to X$. При сопоставлении каждой прямой $\ell \in X$ абсциссы ее точки пересечения с прямой $y = 1$, это преобразование запишется в виде (36). ☐

Следствие 46.3. *Пусть X — проективная прямая, а P_1, P_2, P_3 и P_1', P_2', P_3' — две тройки попарно различных точек X. Тогда на X существует ровно одно проективное преобразование, переводящее P_i в P_i', $i = 1, 2, 3$.*

Контрольный вопрос 46.4. Покажите, что умножению невырожденных матриц 2×2 соответствует композиция соответствующих дробно-линейных преобразований.

Группа всех невырожденных матриц размера $n\times n$ обозначается через $\mathrm{GL}(n)$, а группа невырожденных матриц размера $n\times n$, рассматриваемых с точностью до множителя, через $\mathrm{PGL}(n)$. Таким образом, предложение 46.2 устанавливает изоморфизм группы проективных преобразований прямой и группы $\mathrm{PGL}(2)$.

47. Проективная плоскость как пополнение аффинной. Модель связки проективной плоскости. Задание проективного преобразования образами четырех точек

Пополненной плоскостью будем называть дизъюнктное объединение X произвольной аффинной плоскости Π и множества ∞_Π всех несобственных пучков прямых в Π. (То есть добавленными элементами являются сами пучки, а не прямые в них.) При этом *прямыми* на X будем называть:

- пополненные прямые, полученные добавлением к некоторой обычной прямой на Π содержащего ее несобственного пучка (он, очевидно, единственный), а также
- множество ∞_Π, на котором двойное отношение определяется следующим образом. Пусть $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \infty_\Pi$, и пусть $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ — прямые на Π из одного собственного пучка, для которых $\ell_i \in P_i$. Тогда по определению $(P_1P_2P_3P_4) = (\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4)$.

Добавленные к Π элементы множества ∞_Π также будем называть *несобственными* (*бесконечно удаленными*) *точками* пополненной плоскости X, а для пополненной прямой, содержащей аффинную прямую ℓ, будем говорить, что она *проходит* через точку $P \in \infty_\Pi$, если $\ell \in P$.

Контрольный вопрос 47.1. Корректно ли определение двойного отношения на ∞_Π?

Предложение 47.1. *На пополненной плоскости через любые две различные точки проходит ровно одна прямая, и любые две различные прямые пересекаются ровно по одной точке.*

Схема доказательства. Перебор случаев. ☐

Определение 47.1. *Проективной плоскостью* называется множество X, для которого задано семейство подмножеств, называемых *прямыми*, и в каждом из этих подмножеств определено *двойное отношение* для любых четырех попарно различных точек, причем так, что существует биекция из X на некоторую пополненную плоскость Y, переводящая прямые на X в прямые на Y, сохраняющая двойное отношение на каждой из прямых и такая, что обратная к ней биекция переводит прямые на Y в прямые на X.

Предложение 47.2. *Пусть X — собственная связка прямых в пространстве с центром в некоторой точке O. Назовем прямой на X любой пучок прямых, содержащийся в X, и определим в каждом из них двойное отношение, как в определении 46.3. Тогда X — проективная плоскость.*

Пусть Π — произвольная плоскость в пространстве, не проходящая через точку O. Определим отображение φ из X в пополненную плоскость $\Pi \cup \infty_\Pi$ следующим образом. Если прямая $\ell \in X$ пересекает Π, то $\varphi(\ell) = \ell \cap \Pi$, а если нет, то $\varphi(\ell)$ — это несобственный пучок прямых в Π, параллельных ℓ. Тогда φ — это биекция, переводящая прямые в прямые и сохраняющая двойное отношение.

Схема доказательства. Рутинная проверка. □

Определение 47.2. Пусть X — проективная плоскость. *Проективным преобразованием на X* называется произвольная биекция $X \to X$, переводящая прямые в прямые и сохраняющяя двойное отношение.

Теорема 47.3. *Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 — четыре точки проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 — еще одна такая четверка точек. Тогда существует ровно одно проективное преобразование φ этой проективной плоскости, при котором $\varphi(P_i) = P'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.*

Схема доказательства. Сначала докажем единственность. Достаточно рассмотреть случай $P'_i = P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Так как точки P_1, P_2 и $P_1P_2 \cap P_3P_4$ остаются на месте, все точки прямой P_1P_2 остаются на месте. То же верно для любой точки прямых P_2P_3 и P_3P_1. А отсюда и вообще для любой точки, так как через любую другую точку можно провести прямую, точки пересечения которой с тремя прямыми P_1P_2, P_2P_3 и P_3P_1 различны и остаются на месте.

Для существования воспользуемся моделью связки. Всегда можно подобрать аффинное преобразование пространства, сохраняющее центр данной связки и переводящее любые четыре прямые из этой связки, никакие три из которых не лежат в одной плоскости, в любые другие четыре прямые с тем же свойством. □

Контрольный вопрос 47.2. При проективном преобразовании вершины A и B квадрата $ABCD$ остались на месте, а C и D поменялись местами. Куда отобразился весь квадрат?

48. Проективные системы координат. Аффинные карты. Запись проективных преобразований в координатах

Для обозначения набора чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не все из которых равны нулю, рассматриваемого с точностью до пропорциональности, будем использовать обозначение $[x_1 : x_2 : \ldots : x_n]$. Таким образом, равенство $[x_1 : x_2 : \ldots : x_n] = [y_1 : y_2 : \ldots : y_n]$ означает, что существует, и притом единственное $\lambda \neq 0$, для которого $x_i = \lambda y_i$, $i = 1, \dots, n$. Аналогично, для обозначения столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, рассматриваемого с точностью до пропорциональности, будем использовать обозначение $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Определение 48.1. Пусть X — собственная связка в пространстве, а $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — произвольный базис. Сопоставление каждому элементу $\ell \in X$ тройки $[x_1 : x_2 : x_3]$ определяемой тем, что $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ — направляющий вектор прямой ℓ, называется *проективной системой координат* на X. *Проективной* (или *однородной*) *системой координат* на произвольной проективной плоскости Y называется отображение $Y \mapsto \{[x_1 : x_2 : x_3] : (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)\}$ которое является композицией некоторой биекции $Y \to X$, переводящей прямые в прямые и сохраняющей двойное отношение, и проективной системы координат на собственной связке X.

Предложение 48.1. *Для любых четырех точек A_1, A_2, A_3, E проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, найдется ровно одна проективная система координат, в которой эти точки имеют координаты, соответственно,* $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, $[0:0:1]$ *и* $[1:1:1]$.

Схема доказательства. Используем модель связки. Для четырех прямых одной связки, никакие три из которых не лежат в одной плоскости, всегда можно подобрать базис так, чтобы первые три были осями координат, а четвертая имела направляющим вектором $(1, 1, 1)$. □

Каждый несобственный пучок на арифметической плоскости $\mathbb{R}^2$ будем задавать общим направляющим вектором соответствующих прямых, рассматриваемым с точностью до пропорциональности. Таким образом, точки из $\infty_{\mathbb{R}^2}$ будем отождествлять с элементами вида $[\alpha : \beta]$.

Определение 48.2. Пусть X — произвольная проективная плоскость. *Аффинной картой* на X будем называть биекцию из X в пополненную плоскость $\mathbb{R}^2 \cup \infty_{\mathbb{R}^2}$, переводящую прямые в прямые и сохраняющую двойное отношение. Точки, переводимые в точки $\mathbb{R}^2$, называются в соответствующей аффинной карте *собственными*, а остальные — *несобственными*. Собственные точки в аффинной карте изображаются парой чисел (x, y), а несобственные — парой чисел с точностью до пропорциональности: $[\alpha : \beta]$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Предложение 48.2. *Пусть на проективной плоскости задана проективная система координат. Тогда сопоставление точке с проективными координатами $[x_1 : x_2 : x_3]$ точки из $\mathbb{R}^2 \cup \infty_{\mathbb{R}^2}$ по правилу*: $(x_1/x_3, x_2/x_3)$, *если $x_3 \neq 0$, и $[x_1 : x_2]$ в противном случае, — есть аффинная карта.*

Наоборот, пусть на проективной плоскости задана аффинная карта. Тогда сопоставление собственной точке с координатами (x, y) тройки $[x : y : 1]$, а несобственной точке $[\alpha : \beta]$ тройки $[\alpha : \beta : 0]$ есть проективная система координат.

Схема доказательства. Используем соответствие связки и пополненной плоскости из предложения 47.2. В плоскости Π возьмем произвольный репер $P, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и связанную с ним аффинную систему координат. Она задает аффинную карту. За базис в пространстве возьмем $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OP}$ и рассмотрим связанную с ним проективную систему координат на связке с центром в точке O. Она будет связана с построенной аффинной картой, как требуется. Построение в обратную сторону (по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ плоскости Π с аффинной системой координат в ней) очевидно. □

Предложение 48.3. *В проективной системе координат произвольное проективное преобразование проективной плоскости имеет вид*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

где C — невырожденная матрица размера 3×3. Наоборот, любое отображение такого вида является проективным преобразованием. При этом матрица C определена однозначно с точностью до общего множителя.

Схема доказательства. То, что любое отображение такого вида является проективным преобразованием, следует из сохранения плоскостей и двойного отношения в собственных пучках при аффинном преобразовании. То, что любое проективное преобразование имеет такой вид, вытекает из одинаковой свободы: в обоих семействах отображение однозначно определяется образом любых четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. ☐

Таким образом, группа проективных преобразований плоскости изоморфна $\mathrm{PGL}(3)$.

Следствие 48.4. *В любой аффинной карте общий вид проективного преобразования таков*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \\[2ex] \dfrac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \end{pmatrix}, & \text{если } c_{31}x + c_{32}y + c_{33} \neq 0, \\[2ex] \begin{bmatrix} c_{11}x + c_{12}y + c_{13} \\ c_{21}x + c_{22}y + c_{23} \end{bmatrix}, & \text{если } c_{31}x + c_{32}y + c_{33} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{c_{11}\alpha + c_{12}\beta}{c_{31}\alpha + c_{32}\beta} \\[2ex] \dfrac{c_{21}\alpha + c_{22}\beta}{c_{31}\alpha + c_{32}\beta} \end{pmatrix}, & \text{если } c_{31}\alpha + c_{32}\beta \neq 0, \\[2ex] \begin{bmatrix} c_{11}\alpha + c_{12}\beta \\ c_{21}\alpha + c_{22}\beta \end{bmatrix}, & \text{если } c_{31}\alpha + c_{32}\beta = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

— невырожденная матрица, однозначно с точностью до общего множителя определенная преобразованием.

49. Инцидентность точек и прямых на проективной плоскости. Принцип двойственности. Теоремы Дезарга и Паппа

Предложение 49.1. *Всякая прямая на проективной плоскости в любой проективной системе координат* $(x_1 : x_2 : x_3)$ *задается уравнением вида* $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$*, где коэффициенты* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$*, не все равные нулю, определены прямой однозначно с точностью до множителя. Наоборот, любое уравнение такого вида задает на проективной плоскости прямую.*

Схема доказательства. Очевидно. ☐

Определение 49.1. Говорят, что точка P и прямая ℓ на проективной плоскости *инцидентны друг другу*, если $P \in \ell$.

Предложение 49.2 (Принцип двойственности)**.** *Любое высказывание о прямых и точках на проективной плоскости, выраженное через отношение инцидентности, равносильно высказыванию, полученному из него заменой точек на прямые, а прямых — на точки.*

Схема доказательства. Это следует из того, что в проективной системе координат и точки, и прямые, задаются нетривиальными тройками чисел, рассматриваемыми с точностью до пропорциональности, которые в отношении инцидентности участвуют симметрично. ☐

Пример двойственных друг другу высказываний:

1) через любые две различные точки проходит ровно одна прямая;
2) любые две различные прямые пересекаются ровно в одной точке.

Следующие две теоремы двойственны эквивалентным себе утверждениям.

Теорема 49.3 (Дезарга). *Пусть попарно различные точки $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ на проективной плоскости таковы, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 попарно различны и пересекаются в одной точке. Тогда точки $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_2A_3 \cap B_2B_3$ и $A_3A_1 \cap B_3B_1$ лежат на одной прямой.*

Схема доказательства. Рассмотрим это утверждение для точек в пространстве, не лежащих в одной плоскости. Тогда четверки точек A_i, A_j, B_i, B_j будут лежать в одной плоскости, и прямые A_iA_j, B_iB_j будут пересекаться. Точки пересечения будут лежать на линии пересечения плоскостей треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Теперь «плоское» утверждение получается с помощью проекции этой конструкции на плоскость. □

Теорема 49.4 (Паппа). *Пусть попарно различные точки $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ на проективной плоскости таковы, что A_1, A_2, A_3 лежат на некоторой прямой ℓ_1, а B_1, B_2, B_3 — на прямой ℓ_2, причем $\ell_1 \neq \ell_2$. Тогда точки пересечения $A_1B_2 \cap A_2B_1$, $A_2B_3 \cap A_3B_2$ и $A_3B_1 \cap A_1B_3$ лежат на одной прямой.*

Схема доказательства. Это утверждение можно рассматривать как частный случай теоремы Паскаля, в котором коника вырождена в пару прямых. □

Контрольный вопрос 49.1. Сформулировать двойственные утверждения к теоремам Дезарга и Паппа. Убедиться, что в их формулировках возникают в точности те же конфигурации, что и в исходных теоремах.

Контрольный вопрос 49.2. Объяснить, как теорема, двойственная к теореме Паппа, получается вырождением из теоремы Брианшона.

50. Кривые второго порядка на проективной плоскости. Проективная классификация кривых второго порядка

Алгебраические кривые на проективной плоскости задаются *однородными* уравнениями, то есть уравнениями вида $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, где F — однородный многочлен от проективных координат x_1, x_2, x_3. Степень этого многочлена называется *порядком* соответствующей кривой.

Предложение 50.1. *Порядок уравнения не зависит от выбора проективной системы координат.*

Схема доказательства. Следует из предложения 21.1. □

Предложение 50.2. *Пусть алгебраическая кривая Γ на проективной плоскости в однородных координатах задается уравнением $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ порядка m. Пусть x, y — аффинные координаты в аффинной карте, соответствующей системе $x_1 : x_2 : x_3$.*

Если кривая Γ не содержит прямую $x_3 = 0$, то собственная часть этой кривой в аффинной карте x, y задается уравнением $F(x, y, 1) = 0$, которое также имеет порядок m, а множество несобственных точек совпадает с множеством несобственных пучков прямых, имеющих асимптотическое направление для кривой $F(x, y, 1) = 0$.

Если кривая Γ содержит прямую $x_3 = 0$ с кратностью r, то в аффинной карте x, y собственная часть Γ задается уравнением $F(x, y, 1) = 0$, имеющим порядок $m - r$.

Схема доказательства. Содержать прямую $x_3 = 0$ с кратностью r для кривой, заданной уравнением $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ означает, что многочлен F делится на x_3^r и не делится на x_3^{r+1}. Если $r = 0$, то при подстановке $x_3 = 1$ степень сохранится, а при подстановке $x_3 = 0$ останется многочлен, задающий асимптотические направления. Если $r > 0$, то при подстановке $x_3 = 1$ степень упадет на r. □

Теорема 50.3 (Проективная классификация кривых второго порядка). *Всякая кривая второго порядка на проективной плоскости с помощью выбора проективной системы координат $x_1 : x_2 : x_3$ может быть приведена ровно к одному из следующих видов*:

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (*мнимый овал*);

2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (*овал*);
3) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (*пара мнимых прямых*);
4) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (*пара различных действительных прямых*);
5) $x_1^2 = 0$ (*пара совпадающих прямых*).

Схема доказательства. Это по сути частный случай теоремы 26.3, в которой рассматриваются только аффинные системы координат с фиксированным началом отсчета и только однородные уравнения. □

Контрольный вопрос 50.1. Какими проективными заменами координат получаются друг из друга эллипс, гипербола и парабола, записанные нормальными уравнениями (то есть уравнениями из теоремы 26.2)?

Контрольный вопрос 50.2. Проективным преобразованием параболу перевели в окружность. Во что перешла несобственная прямая?

Контрольный вопрос 50.3. Покажите, что отношение полюс — поляра относительно овала на проективной плоскости становится взаимно однозначным и не зависит от выбора аффинной карты.

51. Овал как проективная прямая. Рациональная параметризация овалов

Теорема 51.1. *Пусть Γ и Γ' — два овала на проективной плоскости, $A, B, C \in \Gamma$ и $A', B', C' \in \Gamma'$ — две тройки различных точек. Тогда существует ровно одно проективное преобразование этой проективной плоскости, при котором точки A, B, C переходят соответственно в A', B', C', а Γ переходит в Γ'*

Схема доказательства. Пусть D — точка пересечения касательных к Γ, проведенных в точках A и B, а D' — точка пересечения касательных к Γ' в точках A' и B'. По теореме 47.3 существует ровно одно проективное преобразование, переводящее A, B, C, D соответственно в A', B', C', D'. Оно переводит Γ в некоторый овал Γ'', который касается прямых $A'D'$ и $B'D'$ в точках A' и B' соответственно и проходит через C'. Это пять однородных условий на коэффициенты уравнения овала. Показав их независимость, получим $\Gamma'' = \Gamma'$. □

Теорема 51.2. *Пусть P_1, P_2, P_3, P_4, P — точки некоторого овала Γ на проективной плоскости, причем первые четыре из них попарно различны. Тогда двойное отношение четверки прямых PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 не зависит от точки P (если $P = P_i$, то под прямой PP_i подразумевается касательная к Γ в точке P).*

Схема доказательства. Поскольку все овалы на проективной плоскости одинаковы, достаточно доказать для одного конкретного. В качестве Γ возьмем окружность. Тогда для любой точки $P' \in \Gamma$ четверку прямых PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 можно перевести в четверку $P'P_1, P'P_2, P'P_3, P'P_4$, так как соответствующие углы между прямыми в этих четверках одинаковы. □

Таким образом, каждый овал Γ на проективной плоскости естественным образом превращается в проективную прямую: двойное отношение $(P_1P_2P_3P_4)$ определяется как $(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4)$, где $\ell_i = PP_i$, а $P \in \Gamma$ — произвольная точка. При этом теоремы 51.1 и 51.2 означают следующее.

Следствие 51.3. *Пусть Γ — некоторый овал на проективной плоскости X. Любое проективное преобразование овала Γ можно однозначно продолжить до проективного преобразования X.*

Эта конструкция дает гомоморфизм $\mathrm{PGL}(2) \to \mathrm{PGL}(3)$, который для каждого овала и его параметризации как проективной прямой несложно построить явно. Например, пусть Γ — это парабола $x = y^2$ с параметризацией $x(t) = t^2$, $y(t) = t$. Проективное преобразование $t \mapsto$

$(at+b)/(ct+d)$ этого овала в соответствующих проективных координатах можно представить умножением на матрицу:

$$\begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (\frac{at+b}{ct+d})^2 \\ \frac{at+b}{ct+d} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (at+b)^2 \\ (at+b)(ct+d) \\ (ct+d)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Получаем следующий гомоморфизм из PGL(2) в PGL(3):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix}.$$

Теорема 51.4. *Параметризация любого овала как проективной прямой с помощью произвольной аффинной координаты t в любой аффинной карте x, y на проективной плоскости имеет вид*

$$x(t) = \frac{c_{11}t^2 + c_{12}t + c_{13}}{c_{31}t^2 + c_{32}t + c_{33}}, \quad y(t) = \frac{c_{21}t^2 + c_{22}t + c_{23}}{c_{31}t^2 + c_{32}t + c_{33}}, \tag{38}$$

где $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ *— некоторая невырожденная матрица.*

Наоборот, любая такая параметризованная кривая является овалом.

Схема доказательства. Сначала выберем аффинную карту x, y так, чтобы касательная в точке $t = \infty$ была несобственной прямой, сама точка $t = \infty$ соответствовала направлению $[1:0]$, значениям $t = 0$ и $t = 1$ соответствовали точки $(0,0)$ и $(1,1)$, причем ось Oy была касательной в начале координат. Тогда овал будет параметризован следующим образом: $x(t) = t^2$, $y(t) = t$. Далее используем общий вид проективного преобразования плоскости (следствие 48.4). □

Контрольный вопрос 51.1. Дать интерпретацию формул (38) в случае обращения в нуль знаменателя и для $t = \infty$.

52. Гиперболические повороты. Псевдоевклидово скалярное произведение на плоскости. Пвсевдоевклидова длина дуги гиперболы

Пусть на плоскости зафиксирована некоторая гипербола Γ.

Определение 52.1. Аффинное преобразование плоскости, переводящую в себя каждую из ветвей Γ и каждую из асимптот, будем называть *гиперболическим поворотом.*

Предложение 52.1. (i) *В аффинной системе координат u, v, осями которой являются асимптоты гиперболы Γ, гиперболический поворот имеет вид $(u, v) \mapsto (e^a u, e^{-a} v)$, где $a \in \mathbb{R}$. Наоборот, любое такое преобразование является гиперболическим поворотом.*

(ii) *Для любых двух точек A и B, лежащих на одной ветви Γ, существует ровно один гиперболический поворот, переводящий A в B.*

Схема доказательства. В указанной системе координат Γ задается уравнением вида $uv = \mathrm{const}$. □

Контрольный вопрос 52.1. Каково множество всех аффинных преобразований, переводящих Γ в себя?

Гиперболический поворот в предложении 52.1 будем обозначать через ρ_a. Заметим, что для его определения нужно выбрать, какая асимптота гиперболы Γ будет считаться первой, а какая — второй.

Контрольный вопрос 52.2. Как изменится ρ_a, если поменять асимптоты местами? Зависит ли определение ρ_a от выбора масштаба вдоль асимптот?

Предложение 52.2. *Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено $\rho_a\rho_b = \rho_{a+b}$.*

Схема доказательства. Очевидно. □

Предложение 52.3. *Пусть оси аффинной системы координат x, y являются взаимно сопряженными диаметрами гиперболы Γ, а прямая $x = y$ является первой из асимптот Γ. Тогда гиперболический поворот ρ_a в этой системе представляется умножением на матрицу*

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}.$$

Схема доказательства. Простое вычисление. □

Контрольный вопрос 52.3. Какие матрицы в этой системе будут иметь все прочие аффинные преобразования, переводящие Γ в себя? (Группа всех этих матриц называется *псевдоортогональной группой* и обозначается через $\mathrm{O}(1,1)$.)

Определение 52.2. Пусть γ — дуга гиперболы Γ, соединяющая две ее различные точки A и B. *Псевдоевклидовой длиной* дуги γ называется такое число $a > 0$, что гиперболический поворот ρ_a переводит одну из точек A и B в другую.

Из предложения 52.2 вытекает

Следствие 52.4. *Пусть дуга γ гиперболы Γ разбита на две меньшие дуги γ' и γ''. Тогда псевдоевклидова длина дуги γ равна сумме псевдоевклидовых длин дуг γ' и γ''.*

Предложение 52.5. *Существует ровно одна билинейная симметрическая функция $\langle\cdot,\cdot\rangle$ от двух векторов плоскости, для которой*

$$\Gamma = \{M : \langle\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}\rangle = 1\},$$

где O — центр гиперболы Γ.

Схема доказательства. Используем предложение 35.1. □

Определение 52.3. Функция $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из предложения 52.5 называется *псевдоевклидовым скалярным произведением*, ассоциированным с гиперболой Γ.

Предложение 52.6. *Пусть P — произвольная точка гиперболы Γ. Положим $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}(\rho_t(P))$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\langle\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle = -1$.*

Схема доказательства. Простое вычисление. □

Предложение 52.7. *Пусть γ — дуга гиперболы Γ с концами A и B, и пусть a — псевдоевклидова длина γ. Тогда*

$$\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle = \operatorname{ch} a,$$

где O — центр гиперболы Γ.

Схема доказательства. Простое вычисление. □

Предложение 52.8. *Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — асимптоты гиперболы Γ, а ℓ_3 и ℓ_4 — две различные прямые, пересекающие одну из ветвей Γ в точках A и B. Тогда длина дуги гиперболы Γ между A и B равна*

$$\frac{1}{2}\left|\ln(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4)\right| = \left|\ln(\infty_{\ell_1}\infty_{\ell_2}AB)\right|,$$

где в последнем выражении имеется в виду двойное отношение на Γ.

Схема доказательства. Прямое вычисление для гиперболы $xy = \mathrm{const}$ и удобно выбранных точек. □

53. Плоскость Лобачевского. Модели Клейна и Пуанкаре. Прямые (геодезические), орициклы, абсолют. Расстояние между точками и угол между прямыми в геометрии Лобачевского

Определение 53.1. *Плоскостью Лобачевского* будем называть «верхнюю половину» двуполостного гиперболоида Σ, заданного в аффинной системе координат t, x, y уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 = 1, \tag{39}$$

т.е. его часть, выделяемую неравенством $t > 0$.

Будем обозначать плоскость Лобачевского через $\mathbb{L}^2$. По аналогии с определением 52.3 гиперболоид (39) задает *псевдоевклидово скалярное произведение* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в пространстве:

$$\langle(\alpha,\beta,\gamma),(\alpha',\beta',\gamma')\rangle = \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma'.$$

Пространство $\mathbb{R}^3$, наделенное этим псевдоевклидовым скалярным произведением, обозначается через $\mathbb{R}^{1,2}$ и называется *трехмерным пространством Минковского* (точнее, пространством Минковского называется в первую очередь аналогичное пространство $\mathbb{R}^{1,3}$, а за компанию — все пространства вида $\mathbb{R}^{1,n}$).

Определение 53.2. *Прямой* (или *геодезической*) на плоскости Лобачевского называется ее пересечение с любой диаметральной плоскостью, если оно непусто. Это пересечение является ветвью гиперболы.

Контрольный вопрос 53.1. Покажите, что через любые две различные точки плоскости Лобачевского проходит ровно одна прямая.

Контрольный вопрос 53.2. Покажите, что любые две различные прямые на плоскости Лобачевского пересекаются не более чем в одной точке.

Определение 53.3. *Расстоянием* между двумя различными точками в $\mathbb{L}^2$ называется псевдоевклидова длина соединяющей их дуги геодезической.

Плоские сечения плоскости Лобачевского, являющиеся параболами, называются *орициклами*, а множество асимптотических направлений — *абсолютом*. Каждая геодезическая имеет два асимптотических направления, которые являются точками абсолюта. Говорят, что геодезическая их *соединяет*.

Контрольный вопрос 53.3. Покажите, что каждую пару различных точек абсолюта соединяет ровно одна геодезическая.

Предложение 53.1. *Ограничение псевдоевклидова скалярного произведения на любую плоскость, параллельную некоторой касательной плоскости к $\mathbb{L}^2$, эквивалентно обычному скалярному произведению, взятому с противоположным знаком. Это значит, что в такой плоскости можно выбрать аффинную систему координат, в которой псевдоевклидово скалярное произведение произвольных векторов с координатами (α,β) и (α',β') равно $-\alpha\alpha' - \beta\beta'$.*

Схема доказательства. Касательная плоскость к $\mathbb{L}^2$ пересекает гиперболоид (39) по паре мнимых пересекающихся прямых, а параллельная ей диаметральная плоскость — по мнимому эллипсу. □

Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — два касательных вектора к $\mathbb{L}^2$, проведенных в одной точке. *Угол* между ними определяется по формуле

$$\angle \boldsymbol{uv} = \arccos\Bigl(-\frac{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}}\Bigr).$$

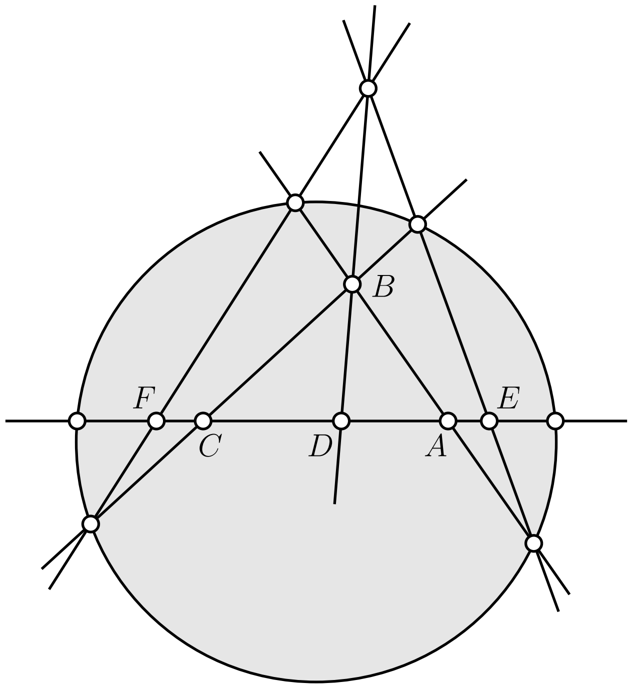
Угол между геодезическими лучами, выходящими из одной точки, называется угол между их касательными векторами в их общей начальной точке.

Модель Клейна — это центральная проекция $\mathbb{L}^2$ на плоскость $t = 1$ из начала координат. Точкам $\mathbb{L}^2$ соответствуют внутренние точки единичного круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, а точкам абсолюта — точки его границы. Прямые на $\mathbb{L}^2$ проецируются в хорды единичной окружности.

Предложение 53.2. *На плоскости Лобачевского для любых трех точек выполнены неравенства треугольника, которые обращаются в равенство только для точек, лежащих на одной прямой.*

Схема доказательства. Воспользуемся предложением 52.8 и следующим построением, из которого вытекает

$$|AC| < \frac{1}{2}\,|\ln(EFAC)| = |AB| + |BC|\,.$$



□

Моделью Пуанкаре называется стереографическая проекция $\mathbb{L}^2$, т.е. центральная проекция на плоскость $t = 0$ из точки $(-1, 0, 0)$. Образом $\mathbb{L}^2$ при этой проекции снова является внутренность единичного круга, а образом абсолюта — его граница.

Предложение 53.3. *В модели Пуанкаре образы прямых — это дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту, и его диаметры без концевых точек, а образы орициклов — окружности, касающиеся абсолюта, с выколотой точкой касания.*

Углы между образами геодезических лучей в модели Пуанкаре равны соответствующим углам на плоскости Лобачевского.

Схема доказательства. Тот факт, что образы геодезических и орициклов являются частями окружностей или прямых, следует из теоремы 37.1. Перпендикулярность геодезических абсолюту следует из того, что точка пересечения их асимптот проецируется в центр единичнго круга. Сохранение углов также следует из теоремы 37.1: сечения $\mathbb{L}^2$ плоскостями, параллельными касательным плоскостям — это окружности в метрике $-\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пары ортогональных относительно $-\langle\cdot,\cdot\rangle$ направлений в такой плоскости проецируются в пары направлений, сопряженных относительно окружности в плоскости $t = 0$, т.е. взаимно ортогональных. □

54. Треугольник на плоскости Лобачевского. Теоремы синусов и косинусов

Псевдоевклидово скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{1,2}$ переходит в обычное, если сделать формально замену координат $\widetilde{t}=t$, $\widetilde{x}=\mathrm{i}x$, $\widetilde{y}=\mathrm{i}y$. Определим векторное произведение в $\mathbb{R}^{1,2}$ так, чтобы при этой замене оно переходило в стандартное:

$$[(t_1,x_1,y_1),(t_2,x_2,y_2)] = \left(-\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & t_1\\ y_2 & t_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_1 & x_1\\ t_2 & x_2\end{vmatrix}\right).$$

Тогда будут выполнены все алгебраические тождества, выведенные ранее для обычных скалярного и векторного произведений.

Единичными будем называть векторы, скалярный квадрат которых в смысле $\langle\cdot,\cdot\rangle$ равен ±1.

Лемма 54.1. *Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — радиус-векторы двух точек на $\mathbb{L}^2$, находящихся на расстоянии a. Тогда $\langle[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}],[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\rangle = -\operatorname{sh}^2 a$.*

Схема доказательства. Применяем первое из равенств в (22) и предложение 52.7. □

Контрольный вопрос 54.1. Проверить, что при реализации $\mathbb{R}^{1,2}$ матрицами размера 2×2 с нулевым следом следующим образом:

$$(t,x,y)\mapsto\begin{pmatrix} x & -t+y\\ t+y & -x\end{pmatrix}$$

псеводевклидово скалярное и векторное произведения запишутся в виде:

$$\langle A,B\rangle = -\operatorname{tr}(AB),\quad [A,B]=\frac{1}{2}(AB-BA).$$

Лемма 54.2. *Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — два единичных касательных вектора к $\mathbb{L}^2$ в одной и той же точке. Тогда $\langle[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}],[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\rangle = \sin^2\alpha$, где α — угол между ними.*

Схема доказательства. Аналогично доказательству предыдущей леммы. □

Определение 54.1. *Выпуклым n-угольником на плоскости Лобачевского* называется пересечение поверхности $\mathbb{L}^2$ с некоторым выпуклым n-гранным углом $\mathfrak{A}$ с вершиной в точке O при условии, что $\mathfrak{A}\backslash\{O\}$ целиком содержится в области $t^2-x^2-y^2>0$.

Теорема 54.3 (Гиперболические теоремы синусов и косинусов)**.** *Пусть a,b,c — длины сторон, а α,β,γ — соответственно противолежащие им углы треугольника на плоскости Лобачевского. Тогда имеют место следующие равенства*:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a}=\frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b}=\frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c},$$

$$\cos\gamma\cdot\operatorname{sh} a\cdot\operatorname{sh} b = \operatorname{ch} a\cdot\operatorname{ch} b-\operatorname{ch} c,$$
$$\operatorname{ch} c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos\gamma.$$

Схема доказательства. Действуем по аналогии со сферическим случаем (см. доказательство теоремы 13.1).

Обозначим единичные направляющие векторы ребер трехгранного угла, сечением которого образован данный треугольник, через $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$, а единичные векторы, сопряженные к плоскостям граней и направленные внутрь угла, через $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$.

По аналогии с (23), используя леммы 54.1 и 54.2, при подходящей нумерации этих векторов будем иметь:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \frac{[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]}{\operatorname{sh} a}, & \boldsymbol{f}_2 &= \frac{[\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]}{\operatorname{sh} b}, & \boldsymbol{f}_3 &= \frac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}{\operatorname{sh} c}, \\
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{[\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3]}{\sin\alpha}, & \boldsymbol{e}_2 &= \frac{[\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1]}{\sin\beta}, & \boldsymbol{e}_3 &= \frac{[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]}{\sin\gamma}, \\
\operatorname{ch} a &= \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\rangle, & \operatorname{ch} b &= \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1\rangle, & \operatorname{ch} c &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle, \\
\operatorname{sh} a &= \sqrt{-\langle [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3], [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\rangle}, & \operatorname{sh} b &= \sqrt{-\langle [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1], [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]\rangle}, & \operatorname{sh} c &= \sqrt{-\langle [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2], [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]\rangle}, \\
\cos\alpha &= \langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\rangle, & \cos\beta &= \langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1\rangle, & \cos\gamma &= \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle, \\
\sin\alpha &= \sqrt{\langle [\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3], [\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3]\rangle}, & \sin\beta &= \sqrt{\langle [\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1], [\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1]\rangle}, & \sin\gamma &= \sqrt{\langle [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2], [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]\rangle}.
\end{aligned}$$

Далее используем тождества (22). □

Контрольный вопрос 54.2. Сформулируйте аналоги теоремы Пифагора для сферы и плоскости Лобачевского.

55. Площадь геодезического многоугольника на плоскости Лобачевского как угловой дефект

Определение 55.1. *Угловым дефектом* (выпуклого) n-угольника на плоскости Лобачевского называется разность между суммой его внешних углов и 2π.

Теорема 55.1. *Угловой дефект любого (выпуклого) n-угольника на плоскости Лобачевского равен его площади.*

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 14.1. Вычисление теперь выглядит так:

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma \approx \frac{\cos\gamma - \cos(\pi - \alpha - \beta)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}(\operatorname{ch} c - 1) \approx \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}\frac{c^2}{2} \approx \frac{1}{2}\sin\gamma \cdot ab. \quad \square$$

Контрольный вопрос 55.1. Что такое площадь многоугольника на плоскости Лобачевского?

56. Расстояние между непересекающимися прямыми и соотношения между длинами сторон прямоугольного шестиугольника на плоскости Лобачевского

Пусть A, B, C — три различные точки на абсолюте плоскости Лобачевского. Тогда прямые, соединяющие A с B и A с C, называются *асимптотически параллельными.*

Предложение 56.1. *Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — две непересекающиеся прямые на плоскости Лобачевского, не являющиеся асимптотически параллельными. Тогда между ними существует единственный общий перпендикуляр в $\mathbb{L}^2$.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — двугранный угол в $\mathbb{R}^{1,2}$, грани которого пересекают $\mathbb{L}^2$ по прямым ℓ_1 и ℓ_2, и пусть $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ — векторы, сопряженные этим граням относительно Σ и направленные относительно соответствующих плоскостей в сторону $\mathfrak{A}$. Тогда $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle = \operatorname{ch} a$, где a — длина общего перпендикуляра к ℓ_1 и ℓ_2.

Схема доказательства. Так как ℓ_1 и ℓ_2 не пересекаются и не асимптотически параллельны, направляющий вектор $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ ребра двугранного угла $\mathfrak{A}$ имеет отрицательный скалярный квадрат. Сопряженная этому вектору диаметральная плоскость гиперболоида Σ и есть та плоскость, которая пересекает $\mathbb{L}^2$ по геодезической, перпендикулярной и ℓ_1, и ℓ_2. Радиус-векторы точек ее пересечения с ℓ_1, и ℓ_2 пропорциональны соответственно $\boldsymbol{u}_2 + \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle \boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_1 + \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle \boldsymbol{u}_2$ (с общим отрицательным коэффициентом). Далее несложное вычисление. □

Контрольный вопрос 56.1. Покажите, что общий перпендикуляр между непересекающимися прямыми, не являющимися асимптотически параллельными, реализует кратчайшее расстояние между ними.

Теорема 56.2. *Пусть a, b', c, a', b, c' — длины последовательных сторон шестиугольника на $\mathbb{L}^2$, все углы которого прямые. Тогда*

$$\operatorname{ch} a' = \frac{\operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c + \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c}, \quad \operatorname{ch} b' = \frac{\operatorname{ch} c \cdot \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sh} a}, \quad \operatorname{ch} c' = \frac{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b}.$$

Схема доказательства. Пусть $\mathfrak{A}$ — шестигранный угол, сечением которого является данный шестиугольник, и пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ — единичные векторы, сопряженные относительно Σ плоскостям его последовательных граней и направленные относительно этих граней в ту же сторону, где находится $\mathfrak{A}$. Тогда (возможно, после обращения знака векторного произведения)

$$\operatorname{ch} a' = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle = \left\langle \frac{[\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1]}{\operatorname{sh} b}, \frac{[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]}{\operatorname{sh} c} \right\rangle = \frac{\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_2 \rangle \\ \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle \end{vmatrix}}{\operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c} = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{ch} b & \operatorname{ch} a \\ -1 & \operatorname{ch} c \end{vmatrix}}{\operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c}.$$

Далее аналогично. □

57. Аффинные преобразования плоскости, сохраняющие параболу. Параболические повороты. Длина дуги орицикла

Предложение 57.1. *Для любого аффинного преобразования прямой $x \mapsto ax + b$ существует ровно одно аффинное преобразование плоскости с аффинной системой координат x, y, которое переводит параболу $y = x^2$ в себя и имеет вид $(x, y) \mapsto (ax + b, p(x, y))$, где p — некоторый многочлен первой степени.*

Любое аффинное преобразование плоскости, сохраняющее параболу $y = x^2$, имеет указанный вид.

Схема доказательства. Из требования сохранения параболы коэффициенты $p(x, y)$ подбираются однозначно: $p(x, y) = 2abx + a^2y + b^2$. То, что иных преобразований нет, следует из того, что диаметры параболы при аффинном преобразовании переходят в диаметры. □

Определение 57.1. Аффинные преобразования плоскости, указанные в предложении 57.1, при $a = 1$ называются *параболическими поворотами.*

Контрольный вопрос 57.1. Зависит ли это определение от выбора системы координат x, y, в которой данная парабола запишется уравнением $y = x^2$?

Контрольный вопрос 57.2. Корректно ли определен параметр b параболического поворота?

Лемма 57.2. *Пусть A и B — две различные точки плоскости Лобачевского. Тогда $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle < 0$.*

Схема доказательства. Обозначим $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OB}$. Имеем: $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \rangle = 2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 2(1 - \operatorname{ch} |AB|) < 0$. □

Определение 57.2. Пусть γ — дуга некоторого орицикла на $\mathbb{L}^2$ с концами A и B. *Длину* этой дуги определим как $\sqrt{-\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$.

Предложение 57.3. *Пусть плоскость Π пересекает $\mathbb{L}^2$ по орициклу Γ, и пусть $f : \Pi \to \Pi$ — некоторый параболический поворот, сохраняющий Γ. Тогда длина дуги орицикла Γ с концами $A \in \Gamma$ и $f(A)$ одинакова для всех точек A.*

Схема доказательства. Подберем систему координат u, v, w в пространстве с началом в точке O так, чтобы плоскость Π задавалась уравнением $w = 1$, а ограничением многочлена $t^2 - x^2 - y^2 - 1$ на Π был многочлен $-u^2 + v$. Из предложения 36.2 получаем: $t^2 - x^2 - y^2 - 1 = -u^2 + w^2 + vw - 1$.

Пусть в системе u, v, w точки A, B имеют соответственно координаты $(u_1, v_1, 1)$ и $(u_2, v_2, 1)$. Длина дуги орицикла Γ между A и B равна

$$\sqrt{-\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle} = \sqrt{-\langle(u_2 - u_1, v_2 - v_1, 0), (u_2 - u_1, v_2 - v_1, 0)\rangle} = |u_1 - u_2|\,.$$

В координатах u, v в плоскости Π каждый параболический поворот, сохранающий Γ, имеет вид $(u, v) \mapsto (u + \mathrm{const}, p(u, v))$. $\square$

58. Изометрические преобразования плоскости Лобачевского. Абсолют плоскости Лобачевского как проективная прямая

Определение 58.1. *Изометрическим преобразованием* (*изометрией, движением*) плоскости Лобачевского называется любая биекция $f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}^2$, сохраняющая расстояния: $|f(A)f(B)| = |AB|$ для всех $A, B \in \mathbb{L}^2$.

Группу всех изометрий плоскости Лобачевского обозначим через $\mathrm{Iso}(\mathbb{L}^2)$. Группу всех матриц аффинных преобразований, сохраняющих псевдоевклидово скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ассоциированное с $\mathbb{L}^2$, обозначим через $\mathrm{O}(1, 2)$, а подгруппу в ней, соответствующую преобразованиям, переводящим каждую из чаш гиперболоида $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ в себя, через $\mathrm{O}_+(1, 2)$. Группу всех матриц (рассматриваемых с точностью до множителя) проективных преобразований плоскости, переводящих овал $t^2 - x^2 - y^2 = 0$ в себя, обозначим через $\mathrm{PO}(1, 2)$.

Каждый элемент группы $\mathrm{O}_+(1, 2)$ задает аффинное преобразование, переводящее $\mathbb{L}^2$ в себя, которое, очевидно, на $\mathbb{L}^2$ изометрично. Кроме того, если этот элемент рассматривать с точностью до множителя, то получится элемент $\mathrm{PO}(1, 2)$. Таким образом, определены гомоморфизмы $\mathrm{O}_+(1, 2) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{L}^2)$ и $\mathrm{O}_+(1, 2) \to \mathrm{PO}(1, 2)$, которые мы назовем *каноническими*.

Теорема 58.1. *Канонические гомоморфизмы групп* $\mathrm{O}_+(1, 2) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{L}^2)$ *и* $\mathrm{O}_+(1, 2) \to \mathrm{PO}(1, 2)$ *являются изоморфизмами.*

Схема доказательства. Нетривиальным является установить, что любая изометрия плоскости Лобачевского продолжается до аффинного преобразования всего пространства Минковского. Для этого воспользуемся моделью Клейна. Из предложения 53.2 следует, что изометрии плоскости Лобачевского в модели Клейна соответствует отображение φ внутренности единичного круга в себя, при котором отрезки прямых переходят в отрезки прямых, а из предложения 52.8 следует, что на этих отрезках сохраняется двойное отношение. Отсюда выводится, что отображение φ есть ограничение проективного преобразования плоскости на внутренность единичного круга. $\square$

Следствие 58.2. *Каждую изометрию плоскости Лобачевского можно однозначно продолжить на абсолют так, чтобы сохранилось отношение геодезических и точек абсолюта, ими соединяемых.*

Теорема 58.3. *Группа* $\mathrm{Iso}(\mathbb{L}^2)$ *изоморфна группе* $\mathrm{PGL}(2)$ *проективных преобразований прямой.*

Схема доказательства. Это вытекает из теорем 58.1, 51.1 и 51.2. Группа $\mathrm{PO}(1, 2)$ состоит из проективных преобразований плоскости, сохраняющих абсолют, который является овалом, при этом двойное отношение на абсолюте сохраняется. Поскольку такими преобразованиями любые три различные точки можно перевести в любые три другие, любое проективное преобразование абсолюта реализуется движением плоскости Лобачевского. $\square$

Опишем гомоморфизм $\mathrm{PGL}(2) \to \mathrm{PO}(1,2)$ явно. Для этого пространство $\mathbb{R}^{1,2}$ отождествим с пространством матриц размера 2×2 с нулевым следом:

$$(t,x,y) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -t+y \\ t+y & -x \end{pmatrix}.$$

Тогда скалярный квадрат $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$ как функция от $\boldsymbol{u}$ совпадет с $\det \boldsymbol{u}$. Точки абсолюта соответствуют вырожденным матрицам с нулевым следом, рассматриваемым с точностью до множителя, которые параметризуются следующим образом:

$$s \mapsto \boldsymbol{u}(s) = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s \end{bmatrix}.$$

Для этой параметризации получаем:

$$\boldsymbol{u}(g(s)) = g\boldsymbol{u}(s)g^{-1}, \quad g \in \mathrm{PGL}(2),$$

где в левой части g интерпретируется как дробно-линейное преобразование с соответствующей матрицей. Записывая отображение $\boldsymbol{u} \mapsto g\boldsymbol{u}g^{-1}$ в координатах t, x, y, получаем следующий гомоморфизм $\mathrm{PGL}(2) \to \mathrm{PO}(1,2)$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} & ab+cd & \frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{2} \\ ac+bd & ad+bc & -ac+bd \\ \frac{-a^2-b^2+c^2+d^2}{2} & -ab+cd & \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2} \end{bmatrix}. \tag{40}$$

59. Классификация проективных преобразований прямой и изометрий плоскости Лобачевского

Определение 59.1. Квадратные матрицы A и B одинакового размера называются *подобными*, если найдется обратимая матрица C, такая что $A = CBC^{-1}$.

Теорема 59.1. *Всякая матрица размера* 2×2 *с определителем* 1 *подобна ровно одной из следующих:*

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
5) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in (0, \pi)$;
6) $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix}$, $u > 0$;
7) $\begin{pmatrix} -\operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u \\ -\operatorname{sh} u & -\operatorname{ch} u \end{pmatrix}$, $u > 0$.

Схема доказательства. Скалярные матрицы подобны только сами себе. Этим отделяются случаи 1) и 3). Подобные матрицы имеют одинаковый след. Этим различаются все остальные случаи.

Пусть определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ равен 1, и эта матрица не скалярна. Нескалярная матрица всегда подобна некоторой матрице с ненулевыми внедиагональными элементами. Потому далее считаем, что $b, c \neq 0$.

Если $a+d=2$, то
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$
Если $a+d=-2$, то
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ d+1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$
Если $|a+d|<2$, то
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{4-(a+d)^2} & a-d \\ 0 & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & -\frac{\sqrt{4-(a+d)^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{4-(a+d)^2}}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{4-(a+d)^2} & a-d \\ 0 & 2c \end{pmatrix}^{-1}.$$
Если $|a+d|>2$, то
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{(a+d)^2-4} & a-d \\ 0 & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{\sqrt{(a+d)^2-4}}{2} \\ \frac{\sqrt{(a+d)^2-4}}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{(a+d)^2-4} & a-d \\ 0 & 2c \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{(a+d)^2-4} & -a+d \\ 0 & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & -\frac{\sqrt{(a+d)^2-4}}{2} \\ -\frac{\sqrt{(a+d)^2-4}}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{(a+d)^2-4} & -a+d \\ 0 & -2c \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$
□

Теорема 59.2. *Всякая матрица размера* 2×2 *с определителем* -1 *подобна ровно одной матрице вида* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1/\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda>0$.

Схема доказательства. Снова без ограничения общности можем считать, что $b\neq 0$.

Если $ad-bc=-1$, то
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}^{-1},$$
где λ_1 и λ_2 — положительный и отрицательный корни уравнения $\lambda^2-(a+d)\lambda-1=0$. □

Элементы группы $\mathrm{PGL}(2)$, указанные в пункте 5) теоремы 59.1 называются *эллиптическими*, в пунктах 2) и 4) — параболическими, а в пунктах 6) и 7), а также элементы, указанные в теореме 59.2, называются *гиперболическими*.

Из теорем 59.1 и 59.2 и формулы (40) вытекает:

Следствие 59.3. *Всякое нетождественное движение плоскости Лобачевского* $\mathbb{L}^2$ *выбором аффинной системы координат* t,x,y *в которой* $\mathbb{L}^2$ *будет задаваться стандартным образом* ($t^2-x^2-y^2=1$, $t>0$), *можно привести ровно к одному из перечисленных ниже видов*:

1) $\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}$, $\alpha\in(0,\pi]$;

2) $\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a & 0 \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}$, $a>0$;

3) $\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a & 0 \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}$, $a>0$;

4) $$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} + \frac{t+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Контрольный вопрос 59.1. Дать геометрическую интерпретацию каждого преобразования из этого списка.

Преобразования, указанные в следствии 59.3, называются *эллиптическими*, *параболическими* или *гиперболическими* в зависимости от типа соответствующих элементов группы $\mathrm{PGL}(2)$. Таким образом, тип движения плоскости Лобачевского определяется по числу неподвижных точек на абсолюте: ни одной в эллиптическом случае, одна — в параболическом и две — в гиперболическом.

60. Комплексная проективная прямая. Геометрические свойства проективных преобразований комплексной прямой

Пополненной комплексной прямой будем называть дизъюнктное объединение множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ и одноэлементного множества, единственный элемент которого обозначим через $\infty_{\mathbb{C}}$ и будем называть *несобственной* или *бесконечно удаленной точкой*. Будем обозначать пополненную комплексную прямую через $\overline{\mathbb{C}}$.

Определим на $\overline{\mathbb{C}}$ *двойное отношение* по тому же правилу, что и в случае пополненной действительной прямой, т.е. с помощью формулы (35), которую в случае, когда одна из точек x_i является несобственной, следует интерпретировать как предел при $x_i \to \infty$.

Будем рассматривать множество $\mathbb{C}$ также как евклидову плоскость с прямоугольными координатами Re и Im. *Обобщенной окружностью* в $\overline{\mathbb{C}}$ называется любая окружность в $\mathbb{C}$, а также любая действительная прямая с добавленной точкой $\infty_{\mathbb{C}}$.

Предложение 60.1. *Четыре точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ лежат на одной обобщенной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно. В этом случае это двойное отношение совпадает с двойным отношением этих точек, рассматриваемых как точки действительного овала или пополненной действительной прямой.*

Схема доказательства. Для доказательства первого утверждения используем равенство углов, опирающихся на одну дугу окружности. Для доказательства второго рассмотрим отображение $z \mapsto 1/\overline{z}$, которое на любой окружности, проходящей через 0, ведет себя как «стереографическая проекция». Оба двойных отношения на такой окружности сохранятся, а окружность перейдет в действительную прямую. Для прямой же утверждение очевидно. □

Определение 60.1. *Проективным преобразованием* пополненной комплексной прямой $\overline{\mathbb{C}}$ называется любая биекция $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, сохраняющая двойное отношение.

Предложение 60.2. *Любое проективное преобразование пополненной комплексной прямой имеет вид*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \tag{41}$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *— невырожденная матрица.*

Наоборот, любое отображение такого вида является проективным преобразованием.

Схема доказательства. Аналогично вещественному случаю. □

Предложение 60.3. *Любое проективное преобразование пополненной комплексной прямой обладает следующими свойствами*:

1) *переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности*;
2) *сохраняет углы пересечения обобщенных окружностей*;

3) *на каждой обобщенной окружности сохраняет двойное отношение ее точек (как точек овала на вещественной плоскости).*

Схема доказательства. Первое и третье свойства следуют из предложения 60.1.

Второе свойство сначала доказывается для обобщенных окружностей, пересекающихся в точке 0. Затем для произвольных обобщенных окружностей Γ_1 и Γ_2 пересекающихся в некоторой точке P, отличной от 0, строятся окружности Γ_1' и Γ_2', проходящие через P и 0 и имеющие в P те же касательные, что и Γ_1 и Γ_2. Для Γ_1' и Γ_2' угол пересечения сохраняется, а значит это верно и для исходных окружностей. □

Предложение 60.4. *Для любых двух троек различных точек z_1, z_2, z_3 и z_1', z_2', z_3' существует ровно две биекции $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, обладающие тремя свойствами, указанными в предложении 60.3 и переводящими z_i в z_i', $i = 1, 2, 3$. Одно из них является проективным преобразованием, а другое — композицией проективного преобразования и комплексного сопряжения, т.е. имеет вид*

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}. \tag{42}$$

Схема доказательства. Тот факт, что существует ровно одно проективное преобразование, переводящее z_i в z_i', $i = 1, 2, 3$, полностью аналогичен вещественному случаю.

Остается доказать, что для любых трех данных точек имеется ровно одно нетождественное преобразование, оставляющее их на месте, и оно имеет вид (42). Точки можно при этом взять любыми.

Пусть f обладает тремя свойствами из предложения 60.3 и оставляет на месте точки $\infty_{\mathbb{C}}$, 0 и 1. Тогда оно тождественно на $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Через точку $\mathbb{i}$ проходит бесконечно много окружностей, пересекающих $\mathbb{R}$ под прямым углом. Каждую из них отображение f должно переводить в себя. Все эти окружности пересекаются в двух точках — $\mathbb{i}$ и $-\mathbb{i}$. Поэтому $f(\mathbb{i}) = \pm\mathbb{i}$. Из того, что f сохраняет двойное отношение на каждой из упомянутых окружностей, получаем, что на всей пополненной комплексной прямой отображение f либо будет тождественным, либо будет иметь вид $z \mapsto \bar{z}$. □

Отождествим пополненную комплексную прямую $\overline{\mathbb{C}}$ со сферой $\mathbb{S}^2$ с помощью стереографической проекции. Тогда преобразования (41) и (42) будут биекциями $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, переводящими окружности в окружности и сохраняющими углы пересечения между ними, а также двойное отношение на каждой из окружностей.

Преобразования, сохраняющие углы пересечения между кривыми, принято называть *конформными.* В курсе комплексного анализа будет показано, что никаких других конформных преобразований сферы $\mathbb{S}^2$, кроме (41) и (42), не существует. По этой причине группу преобразований, определенных формулами (41) и (42) мы будем называть *группой конформных преобразований сферы* и обозначать через $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^2)$.

61. Трехмерное пространство Лобачевского. Плоскости, орисферы, углы между плоскостями

Трехмерное *пространство Лобачевского* $\mathbb{L}^3$ определяется по аналогии с плоскостью Лобачевского как гиперповерхность в пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами t, x, y, z, заданная системой

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad t > 0.$$

В пространстве $\mathbb{R}^4$ фиксируется псевдоевклидово скалярное произведение $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, ассоциированное с этой поверхностью:

$$\langle(\alpha, \beta, \gamma, \delta), (\alpha', \beta', \gamma', \delta')\rangle = \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta'.$$

Пространство $\mathbb{R}^4$ этим скалярным произведением называется *пространством Минковского* и обозначается через $\mathbb{R}^{1,3}$.

Прямыми в пространстве Лобачевского называются непустые пересечения $\mathbb{L}^3$ с двумерными плоскостями, проходящими через начало координат O. *Плоскостями* в $\mathbb{L}^3$ называются непустые пересечения $\mathbb{L}^3$ с гиперплоскостями, проходящими через точку O. Углы между касательными векторами, проведенными в одной точке, и расстояния между точками определяются так же, как для плоскости Лобачевского.

Контрольный вопрос 61.1. Покажите, что через любые две различные точки в $\mathbb{L}^3$ проходит ровно одна прямая, а через любые три точки, не лежащие на одной прямой — ровно одна плоскость.

Контрольный вопрос 61.2. Покажите, что любая плоскость в пространстве Лобачевского изометрична плоскости Лобачевского.

Контрольный вопрос 61.3. Покажите, что любые две плоскости в пространстве Лобачевского либо не пересекаются, либо пересекаются по прямой.

Модель Клейна и *модель Пуанкаре* для пространства Лобачевского определяются аналогично случаю плоскости. В первом случае применяется проекция из начала координат на плоскость $t = 1$, во втором — проекция из точки $(-1, 0, 0, 0)$ на плоскость $t = 0$. В обоих случаях $\mathbb{L}^3$ проецируется в единичный шар $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в обеих моделях называется *абсолютом* и отождествляется с множеством асимптотических направлений гиперповерхности $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

Сечения $\mathbb{L}^3$ гиперплоскостями, сопряженными асимптотическим направлениям, называются *орисферами*.

Контрольный вопрос 61.4. Покажите, что орисферы — это те гиперплоские сечения $\mathbb{L}^3$, которые являются эллиптическими параболоидами.

Контрольный вопрос 61.5. Покажите, что образы любых гиперплоских сечений пространства Лобачевского в модели Пуанкаре являются сферами или частями сфер или плоскостей.

Предложение 61.1. *Для любой орисферы S существует изометричное отображение евклидовой плоскости на S, при котором прямые переходят в орициклы.* (*Изометричность означает, что прямолинейные отрезки переходят в дуги орициклов той же длины в смысле определения 57.2.*)

Схема доказательства. Пусть Π — гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{1,3}$, пересечение которой с $\mathbb{L}^3$ есть S, а Π_0 — касательная плоскость к S внутри Π. Тогда отображение, обратное к проекции S на Π_0 вдоль своего асимптотического направление является изометрией, если в качестве скалярного произведения в Π_0 использовать $-\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. $\square$

Пусть Π_1 и Π_2 — две пересекающиеся плоскости в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$, и пусть $\mathfrak{A}$ — один из двугранных углов, который они ограничивают. В каждой точке P прямой $\ell = \Pi_1 \cap \Pi_2$ можно определить величину этого угла по аналогии с евклидовым пространством, а именно, как угол $\alpha(P)$ между касательными векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ в точке P к Π_1 и Π_2 соответственно, перпендикулярными ℓ и направленными в ту же сторону относительно Π_2 и Π_1, где находится двугранный угол $\mathfrak{A}$.

Предложение 61.2. *В обозначениях выше угол $\alpha(P)$ не зависит от точки P и равен углу между соответствующими сторонам двугранного угла $\mathfrak{A}$ дугами абсолютов плоскостей Π_1 и Π_2 на абсолюте всего пространства Лобачевского.*

Схема доказательства. Используем модель Пуанкаре, в которой плоскости изображаются частями сфер, перпендикулярных абсолюту пространства $\mathbb{L}^3$. $\square$

62. Движения пространства Лобачевского и конформные преобразования сферы. Классификация собственных движений пространства Лобачевского

Группа изометрий $\mathrm{Iso}(\mathbb{L}^3)$, группы $\mathrm{O}_+(1,3)$ и $\mathrm{PO}(1,3)$, а также канонические гомоморфизмы $\mathrm{O}_+(1,3) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{L}^3)$ и $\mathrm{O}_+(1,3) \to \mathrm{PO}(1,3)$ определяются аналогично случаю плоскости Лобачевского.

Теорема 62.1. *Канонические гомоморфизмы групп* $\mathrm{O}_+(1,3) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{L}^3)$ *и* $\mathrm{O}_+(1,3) \to \mathrm{PO}(1,3)$ *являются изоморфизмами.*

Схема доказательства. Аналогично доказательству теоремы 58.1. □

Как и в случае плоскости Лобачевского, каждая изометрия пространства Лобачевского $\mathbb{L}^3$ задает некоторую биекцию на абсолюте — множестве асимптотических направлений $\mathbb{L}^3$.

Теорема 62.2. *Группа преобразований сферы, соответствующих движениям пространства Лобачевского, совпадает с группой* $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^2)$ *всех конформных преобразований.*

Схема доказательства. Сохранение окружностей и двойного отношения на них следует из того, что в модели Клейна изометрии пространства Лобачевского представляются проективными преобразованиями. Сохранение углов на абсолюте следует из предложения 61.2 и сохранения углов между плоскостями в $\mathbb{L}^3$.

Чтобы показать, что все конформные преобразования сферы продолжаются до проективного преобразования всего пространства, нужно убедиться, что проективным преобразованием, сохраняющим сферу, можно перевести любые три ее различные точки в любые три другие, причем ровно двумя способами. Пусть нужно перевести точки P, Q, R в точки P', Q', R'. Чтобы однозначно определить проективное преобразование пространства, нужно указать образы пяти точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости.

Пусть Π_1, Π_2, Π_3 — касательные плоскости к $\mathbb{S}^2$ в точках P, Q, R соответственно, S — точка пересечения этих плоскостей, а Π — сопряженная точке S плоскость. Обозначим через U, V, W вершины треугольника, высекаемого в Π плоскостями Π_1, Π_2, Π_3, противолежащие сторонам, на которых лежат точки P, Q, R, соответственно. Пусть ℓ — прямая, проходящая через S и точку пересечения прямых PU, QV и RW. Возьмем за T любую из точек пересечения ℓ с $\mathbb{S}^2$ (их ровно две). Аналогичным образом построим точки S' и T' по точкам P', Q', R'. Покажем, что проективное преобразование, переводящее P, Q, R, S, T в P', Q', R', S', T' соответственно, сохраняет сферу $\mathbb{S}^2$. □

Движения пространства Лобачевского, для которых соответствующее конформное преобразование абсолюта имеет вид (41) (в некоторой стереографической проекции), будем называть *собственными*. Таким образом, группа собственных изометрий пространства Лобачевского изоморфна $PGL(2,\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C})$. Опишем явно соответствующую инъекцию $PSL(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PO}(1,3)$.

Для этого отождествим пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ с пространством эрмитовых матриц (матрица A называется *эрмитовой*, если $\overline{A} = A^\top$):

$$(t,x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} t+x & y+z\mathbb{i} \\ y-z\mathbb{i} & t-x \end{pmatrix}.$$

Тогда скалярный квадрат $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$ совпадет с $\det \boldsymbol{u}$, а абсолют пространства $\mathbb{L}^3$ совпадет с множеством эрмитовых матриц размера 2×2 ранга 1, рассматриваемых с точностью до множителя, которые можно параметризовать следующим образом:

$$\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \mapsto \begin{bmatrix} \zeta \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\zeta} & 1 \end{bmatrix}.$$

Контрольный вопрос 62.1. Покажите, что эта параметризация в моделях Клейна и Пуанкаре есть обратная стереографическая проекция (с точностью до перестановки координат).

Преобразование абсолюта $\zeta \mapsto (a\zeta + b)/(c\zeta + d)$ продолжится на все проективное трехмерное пространство как

$$\boldsymbol{u} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix}.$$

Получаем следующий гомоморфизм из $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ в $\mathrm{PO}(1,3)$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2}{2} & \frac{|a|^2-|b|^2+|c|^2-|d|^2}{2} & \mathrm{Re}(a\overline{b} + c\overline{d}) & \mathrm{Im}(\overline{a}b + \overline{c}d) \\ \frac{|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2}{2} & \frac{|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2}{2} & \mathrm{Re}(a\overline{b} - c\overline{d}) & \mathrm{Im}(\overline{a}b - \overline{c}d) \\ \mathrm{Re}(a\overline{c} + b\overline{d}) & \mathrm{Re}(a\overline{c} - b\overline{d}) & \mathrm{Re}(a\overline{d} + b\overline{c}) & \mathrm{Im}(\overline{a}d - \overline{b}c) \\ \mathrm{Im}(a\overline{c} + b\overline{d}) & \mathrm{Im}(a\overline{c} - b\overline{d}) & \mathrm{Im}(a\overline{d} + b\overline{c}) & \mathrm{Re}(\overline{a}d - \overline{b}c) \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Контрольный вопрос 62.2. Покажите, что формула (43) задает изоморфизм из $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ в подгруппу $\mathrm{PSO}(1,3)$ группы $\mathrm{PO}(1,3)$, состоящую из матриц с положительным определителем, рассматриваемых с точностью до множителя.

Теорема 62.3. *Любая комплексная матрица размера* 2×2 *с определителем* 1 *подобна одной из следующих матриц*:

1) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$;
2) $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Две различные матрицы в этом списке подобны тогда и только тогда, когда они диагональны и взаимно обратны.

Следствие 62.4. *Всякое собственное движение пространства Лобачевского выбором системы координат* t, x, y, z, *в котором оно задается стандартным образом, можно привести ровно к одному из следующих видов*:

1) $\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, a & \mathrm{sh}\, a & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\, a & \mathrm{ch}\, a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $a \geqslant 0$, $\alpha \in [0, \pi]$;
2) $\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Контрольный вопрос 62.3. Дать геометрическую интерпретацию для каждого из этих преобразований. Рассмотреть случаи нулевых и ненулевых значений параметров a и α.