

Вопросы по курсу  
«Аналитическая геометрия»  
мехмат МГУ, осень 2021.  
лектор проф. Д.В. Миллионщиков

1. Векторы и операции над ними. Свойства операций.
2. Линейная зависимость и независимость векторов. Коллинеарность и компланарность векторов. Лемма о линейно зависимой системе векторов. Лемма о линейно зависимой подсистеме («лемма о троянском коне»).
3. Лемма о геометрической интерпретации линейной зависимости. Базис векторов на плоскости и в пространстве. Теорема о базисе.
4. Координаты вектора относительно базиса. Лемма о свойстве координат вектора.
5. Аффинная система координат. Координатный репер. Радиус-вектор точки.
6. Формулы для координат точки, делящей направленный отрезок в заданном отношении. Центр масс и его свойства.
7. Скалярное произведение и теорема о его свойствах. Формулы для скалярного произведения в ортогональной системе координат.
8. Замена аффинной системы координат на плоскости. Теорема о формулах аффинной замены системы координат.
9. Ориентированная площадь параллелограмма и ее свойства.
10. Отношение эквивалентности на множестве базисов плоскости.
11. Ориентация плоскости и ориентация пространства.
12. Ориентированный объем параллелепипеда.
13. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов и его связь с ориентированным объемом.
14. Теорема о свойствах смешанного произведения.
15. Теорема о свойствах векторного произведения.
16. Формула для векторного произведения в ортогональной системе координат. Формулы для двойного векторного произведения.
17. Параметрическое и общее уравнение прямой на плоскости в произвольной аффинной системе координат. Их эквивалентность для выбранной прямой.
18. Теорема единственности для общего уравнения прямой на плоскости.
19. Взаимное расположение двух прямых на плоскости – связь с уравнениями.
20. Пучок прямых на плоскости: собственный и несобственный. Первая теорема о пучке прямых (пучок уравнений).
21. Вторая теорема о пучке прямых на плоскости (через определитель третьего порядка).
22. Положительная и отрицательная полуплоскости, определенные уравнением прямой.
23. Вектор нормали к прямой заданной общим уравнением в ортогональной системе координат. Формула для угла между прямыми.

24. Формула для расстояния от точки до прямой на плоскости в ортогональной системе координат.
25. Плоскости в пространстве. Эквивалентность общего и параметрического уравнений плоскости.
26. Лемма о векторе, параллельном плоскости. Теорема о двух уравнениях первого порядка, задающих одну и ту же плоскость.
27. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Пучок плоскостей. Теорема о пучке плоскостей. Связка плоскостей.
28. Виды уравнений прямой в пространстве.
29. Расстояние от точки до плоскости. Нормаль к плоскости. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью.
30. Угол между прямыми в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
31. Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве. Формула для расстояния от точки до прямой в пространстве.
32. Ортогональные замены координат на плоскости. Ортогональные матрицы.
33. Уравнения второго порядка на плоскости и понятие квадрики.
34. Лемма о повороте ортогональной системы координат, приводящим квадратичную форму уравнения к диагональному виду.
35. Теорема о трех типах канонических уравнений второго порядка.
36. Ортогональные инварианты уравнения второго порядка.
37. Теорема о существовании канонической системы координат и канонических уравнений для плоских квадрик.
38. Определения вида кривой второго порядка по ее ортогональным инвариантам (кроме пар параллельных прямых).
39. Эллипс как геометрическое место точек (фокальное свойство).
40. Эллипс как коническое сечение (шары Данделена). Эксцентриситет эллипса, директориальное свойство эллипса.
41. Парабола как геометрическое место точек (фокус и директриса). Парабола как коническое сечение (директриса и шар Данделена).
42. Гипербола как геометрическое место точек (фокальное свойство). Гипербола как коническое сечение (шары Данделена).
43. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.
44. Уравнения эллипса, гиперболы (правая ветвь), параболы в полярной системе координат.
45. Матричная форма записи уравнения второго порядка и закон изменения матрицы квадратичной формы при аффинной замене координат.
46. Характеристический многочлен квадратичной формы кривой второго порядка и ортогональные инварианты. Теорема об ортогональной инвариантности характеристического многочлена квадратичной формы уравнения второго порядка.
47. Ортогональный полуинвариант, его свойства и применение.
48. Распадающаяся кривая второго порядка и теорема об уравнении кривой второго порядка, содержащей прямую.
49. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Асимптотические направления

50. Диаметр кривой второго порядка, вывод его уравнения. Особые направления.
51. Центр кривой второго порядка и центр симметрии. Теорема о центре кривой второго порядка.
52. Теорема о классификации кривых второго порядка по числу центров симметрии.
53. Ось симметрии кривой второго порядка как диаметр. Уравнение оси симметрии параболы.
54. Диаметры и центр симметрии. Теорема о диаметрах кривой второго порядка с единственным центром.
55. Главные направления для кривой второго порядка.
56. Теорема о связи главных направлений кривой второго порядка с ее осями симметрии. Теорема о числе осей симметрии для содержательных кривых второго порядка (более одной точки).
57. Главные направления и собственные векторы матрицы квадратичной формы. Нумерация корней характеристического многочлена для эллипса и гиперболы. Вывод формулы для тангенса угла наклона новой оси  $Ox'$  к старой оси  $Ox$ .
58. Касательная к кривой второго порядка. Особые точки. Матричная запись уравнения касательной.
59. Поляра и полюс. Корректность определения поляры.
60. Теорема о двойственности отношения полюс-поляра.
61. Теоремы единственности для кривых второго порядка. Квадрика как класс эквивалентности уравнений второго порядка.
62. Теорема Паскаля. Теорема Брианшона (случай эллипса).
63. Уравнение второго порядка в пространстве. Приведение квадратичной формы к главным осям.
64. Лемма о 5 типах канонических уравнений для поверхности второго порядка.
65. Теорема о существовании канонической системы координат и канонических уравнений для пространственных квадрик.
66. Теорема об однозначной определенности канонических уравнений для пространственных квадрик.
67. Уравнения и графики: эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов и конуса – метод сечений этих поверхностей координатными плоскостями
68. Теорема о пересечении поверхности второго порядка с плоскостью.
69. Теорема о пересечении прямой с поверхностью второго порядка.
70. Теорема о прямолинейных образующих гиперболического параболоида.
71. Касательные прямые и касательная плоскость к поверхности второго порядка.
72. Аффинные преобразования плоскости и пространства. Их основные свойства.
73. Изометрические преобразования.
74. Ортогональные матрицы второго порядка и теорема Шаля для плоскости.
75. Метрическая классификация непустых кривых и поверхностей второго порядка.

76. Аффинная классификация непустых кривых второго порядка.
77. Теорема о прямолинейных образующих однополостного гиперboloида (только существование двух семейств).
78. Три модели проективной плоскости.
79. Проективные преобразования.

Литература.

Ильин В.А., Поздняк Э.Г., «Аналитическая геометрия», М.: ФИЗМАТЛИТ.  
Веселов А.П., Троицкий «Лекции по аналитической геометрии», МГУ, 2002.