

**Программа курса  
Аналитическая геометрия  
Мехмат МГУ, осень 2019  
Лектор А.В.Пенской**

**1.** Геометрическое определение коник (эллипса, гиперболы и параболы), их связь с коническими сечениями через шары Данделена. Аналитическое уравнение эллипса, гиперболы и параболы, эквивалентность геометрического и аналитического определений.

**2.** Геометрическое определение касательных к коникам, оптическое свойство, свойства конфокальных семейств эллипсов и гипербол, конфокальных семейств парабол.

**3.** Директрисы, эксцентриситет, фокальный параметр и фокальная хорда, директориальное свойство коник. Асимптоты гиперболы и их свойства.

**4.** Полярные координаты и уравнения коник в полярных координатах.

**5.** Линейные комбинации векторов, линейная зависимость и независимость. Связь с коллинеарностью и компланарностью. Базис, координаты вектора в базисе, координаты суммы векторов и вектора, умноженного на число. Реперы и системы координат, координаты точки в системе координат. Деление отрезка в заданном отношении.

**6.** Скалярное произведение и его свойства. Формулы для скалярного произведения векторов, длины вектора и угла между векторами через координаты векторов в ортонормированном базисе. Формула проекции вектора на вектор.

**7.** Ориентированная площадь и её свойства. Ориентация базисов в плоскости, два класса ориентации базисов, одинаковая ориентированность двух базисов как возможность продеформировать один базис в другой. Ориентация плоскости как выбор одного из классов ориентации базисов.

**8.** Ориентация базиса относительно другого базиса в пространстве, ориентация пространства. Векторное произведение, смешанное произведение. Равенство смешанного произведения и ориентированного объёма. Свойства векторного и смешанного произведения, явные формулы в координатах, формула для площади параллелограмма, порождённого двумя векторами в пространстве.

**9.** Неявное и параметрическое задание кривых в плоскости. Параметрическое, каноническое и общее уравнение прямой в плоскости. Теорема о том, что два общих уравнения задают одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда их коэффициенты пропорциональны.

**10.** Полуплоскости и знак выражения  $Ax + By + C$ . Утверждение о том, что вектор  $(A, B)$  «смотрит в положительную полуплоскость».

**11.** Определение собственного и несобственного пучка прямых в плоскости. Теорема о том, что прямая  $l$  лежит в пучке, которому принадлежат прямые  $l_1$  и  $l_2$ , тогда и только тогда, когда уравнение  $l$  является линейной комбинацией уравнений прямых  $l_1$  и  $l_2$ .

**12.** Нормаль к прямой в плоскости. Расстояние от точки до прямой в плоскости. Угол между прямыми в плоскости.

**13.** Параметрическое и общее уравнение плоскости. Взаимные расположения двух плоскостей. Полупространства. Пучки плоскостей. Теорема о том, что плоскость  $\pi$  лежит в пучке, которому принадлежат плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , тогда и только тогда, когда уравнение  $\pi$  является линейной комбинацией уравнений плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

**14.** Связки плоскостей. Теорема о том, что плоскость  $\pi$  лежит в связке, которому принадлежат не принадлежащие одному пучку плоскости  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ , тогда и только тогда, когда уравнение  $\pi$  является линейной комбинацией уравнений плоскостей  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ . Определение конфигурации четырёх плоскостей по рангам матрицы и расширенной матрицы из их коэффициентов.

15. Расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями.
16. Прямые в пространстве: параметрическое и каноническое уравнения, описание прямой как пересечения двух плоскостей. Эквивалентность этих способов задания прямой.
17. Расстояние от точки до прямой в пространстве, угол пересечения прямой и плоскости, расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.
18. Матрица перехода от старого базиса к новому, выражение старых координат вектора через новые. Выражение старых координат точки через новые при переходе от старого репера к новому. Ортогональные матрицы. Утверждение о том, что матрица перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортогональная тогда и только тогда, когда новый базис тоже ортонормированный.
19. Группы  $GL(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ . Описание групп  $O(2)$  и  $SO(2)$ . Описание группы  $SO(3)$  через углы Эйлера.
20. Цилиндрические и сферические координаты.
21. Квадрики и кривые второго порядка. Преобразование квадрики при замене координат. Теорема о приведении квадрик к каноническому виду ортогональными преобразованиями.
22. Ортогональные инварианты квадрик. Инварианты  $S$ ,  $\delta$  и  $\Delta$ . Определение типа квадрики с их помощью.
23. Полуинвариант  $K$ . Сохранение полуинварианта  $K$  при ортогональных преобразованиях у квадрик с  $\delta = \Delta = 0$ . Полная классификация квадрик при помощи  $S$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$  и  $K$ .
24. Теорема существования и единственности квадрики, проходящей через заданные пять точек, из которых никакие четыре не лежат на одной прямой.
25. Теорема о том, что два уравнения второй степени, задающие содержательную (то есть содержащую более одной точки) кривую второго порядка, пропорциональны, то есть между содержательными кривыми второго порядка и задающими их квадриками есть взаимно однозначное соответствие.
26. Теорема Паскаля и обратная теорема Паскаля. Различные частные случаи.
27. Асимптотические и неасимптотические направления плоской квадрики. Диаметр, сопряжённый неасимптотическому направлению. Центр квадрики. Сопряжённые диаметры.
28. Оси симметрии плоской квадрики, главные направления и главные диаметры, связь с собственными векторами матрицы квадратичной части, алгоритм приведения плоской квадрики к каноническому виду с помощью центра и главных направлений.
29. Особые и неособые точки плоской квадрики. Касательная к плоской квадрике в неособой точке. Случай особой точки.
30. Полярное соответствие (поляритет): аналитическое определение поляры для данного полюса, геометрическое построение поляры для разных случаев расположения полюса. Существование и единственность полюса прямой, не проходящей через центр квадрики.
31. Теорема Бриансона. Теорема о построении поляры с помощью хорд и её следствия.
32. Аффинные преобразования. Изометрии. Теорема Шаля. Классификация изометрий пространства (без доказательства). Связь преобразований и замен координат.
33. Метрическая и аффинная классификация кривых второго порядка.
34. Поверхности второго порядка. Теорема о приведении поверхностей второго порядка к каноническому виду.
35. Эллипсоид. Однополостный гиперболоид. Прямолинейные образующие на однополостном гиперболоиде. Двуполостный гиперболоид.

**36.** Эллиптический параболоид. Гиперболический параболоид и его прямолинейные образующие.

**37.** Конус. Утверждение о том, что конус над эллипсом — конус второго порядка. Эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры, их образующие. Теорема о том, что нет прямолинейных образующих на цилиндрах кроме образующих.

**38.** Асимптотические и неасимптотические направления поверхности второго порядка. Диаметральная плоскость, сопряжённая неасимптотическому направлению. Главные направления, плоскости симметрии, связь с ненулевыми характеристическими числами квадратичной части.

**39.** Метрическая классификация квадрик в пространстве. Аффинная классификация квадрик в пространстве.

**40.** Особые и неособые точки квадрик в пространстве. Касательная прямая, касательная плоскость к квадрике в неособой точке.

**41.** Применение теории поверхностей второго порядка: теорема о том, что аффинное преобразование можно представить как композицию изометрии и трех растяжений/сжатий вдоль перпендикулярных осей, и альтернативное доказательство теоремы Брианшона.

**42.** Пополнение аффинной плоскости через добавление несобственных точек, соответствующих несобственным пучкам прямых. Конструкция проективной плоскости как связки прямых в пространстве. Аффинно-проективная плоскость как проективная плоскость с выбранной аффинной картой. Проективная прямая как пучок прямых в плоскости, аффинно-проективная прямая.

**43.** Проективные прямые в проективной плоскости. Теорема Дезарга.

**44.** Выбор базиса в пространстве (плоскости) и соответствующий выбор однородных координат на проективной плоскости (прямой). Задание однородных координат с помощью фундаментальной четверки на проективной плоскости (фундаментальной тройки на проективной прямой). Однородные координаты и аффинные координаты в аффинной карте.

**45.** Уравнение проективной прямой. Проективная двойственность. Уравнение проективной квадрики. Уравнение проективной квадрики в аффинных координатах в аффинной карте. Проективизация аффинной квадрики.

**46.** Касательная прямая к проективной квадрике в неособой точке. Полярное соответствие (поляритет) в проективной плоскости. Проективная интерпретация диаметра, сопряжённого неасимптотическому направлению, как поляры несобственной точки. Проективная интерпретация центра как полюса несобственной прямой.

**47.** Проективные преобразования проективной плоскости и прямой, задание в координатах и свойства. Двойное отношение четырех точек проективной прямой и его свойства. Теорема о полном четырёхстороннике.

**48.** Проективная классификация квадрик.

**49.** Рациональная параметризация проективных коник. Двойное отношение четырех точек на конике и его свойства.

**50.** Двойственная квадрика.