

**Программа курса по аналитической геометрии,
3-й поток, осень 2013 г.**

Лектор – д.ф.-м.н. А.А. Гайфуллин

1. Закреплённые и свободные векторы. Операции сложения векторов и умножения вектора на число, их свойства.
2. Линейная зависимость векторов. Необходимые и достаточные условия линейной зависимости двух, трёх и четырёх векторов.
3. Базисы. Разложение вектора по базису. Аффинная система координат. Деление отрезка в данном отношении.
4. Скалярное произведение векторов. Его основные свойства. Формула для вычисления ортогональной проекции одного вектора на прямую, параллельную другому вектору.
5. Формулы для скалярного произведения в ортонормированном и неортонормированном базисах. Матрица Грама.
6. Два класса базисов на плоскости. Ориентация плоскости. Ориентированная площадь параллелограмма, её свойства.
7. Два класса базисов в пространстве (без доказательства). Ориентация пространства. Векторное и смешанное произведения векторов. Ориентированный объём параллелепипеда.
8. Основные свойства векторного и смешанного произведений. Формулы для них в ортонормированном базисе. Формула двойного векторного произведения и тождество Якоби.
9. Виды уравнений прямой на плоскости. Переходы между разными видами уравнений. Условие параллельности вектора и прямой.
10. Формулы для расстояния от точки до прямой и для угла между двумя прямыми в прямоугольных координатах на плоскости.
11. Виды уравнений плоскости в пространстве. Переходы между разными видами уравнений. Условие параллельности вектора и плоскости.
12. Формулы для расстояния от точки до плоскости и для угла между двумя плоскостями в прямоугольных координатах.
13. Полуплоскости и полупространства, их задание линейными неравенствами.
14. Пучки прямых на плоскости и плоскостей в пространстве. Условие принадлежности трёх прямых (плоскостей) одному пучку.
15. Прямая в пространстве. Параметрическое и каноническое уравнения. Уравнение прямой пересечения двух плоскостей.
16. Формулы для расстояния от точки до прямой в пространстве, для расстояния между скрещивающимися прямыми и для углов между прямыми и плоскостями в прямоугольных координатах.
17. Замены аффинных координат. Матрица перехода от одного репера к другому. Формулы для преобразований координат точек и векторов при переходе к другому реперу.
18. Связь между матрицами Грама двух базисов и матрицей перехода между ними. Выражение площади параллелограмма и объёма параллелепипеда через матрицы Грама.
19. Ортогональные матрицы, их характеристика как матриц перехода между ортонормированными базисами. Ортогональные матрицы 2×2 .
20. Углы Эйлера. Ортогональные матрицы 3×3 с определителем 1.

21. Полярные, сферические и цилиндрические координаты. Формулы, связывающие их с прямоугольными координатами.
22. Аффинные преобразования плоскости и пространства. Их задание в координатах. Матрица аффинного преобразования. Преобразование векторов под действием аффинного преобразования.
23. Изменение матрицы аффинного преобразования при замене координат.
24. Изометрические преобразования плоскости и пространства, их матрицы. Классификация изометрических преобразований плоскости (теорема Шаля).
25. Лемма о наличии у изометрического преобразования пространства собственного вектора с собственным значением 1 или -1.
26. Классификация изометрических преобразований пространства.
27. Геометрические определения эллипса, гиперболы и параболы. Вывод их уравнений.
28. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения. Шары Данделена.
29. Оптические свойства коник. Асимптоты гиперболы. Стремление гиперболы к своим асимптотам.
30. Директориальные свойства коник. Эксцентриситет.
31. Задание эллипса, параболы и гиперболы в полярных координатах. Фокальный параметр.
32. Теорема о приведении кривой второго порядка (квадрики на плоскости) к каноническому виду.
33. Ортогональные инварианты квадрики на плоскости. Полуинвариант.
34. Восстановление канонического уравнения квадрики по ортогональным инвариантам и полуинварианту.
35. Теорема о существовании и единственности кривой второго порядка, проходящей через пять точек.
36. Единственность с точностью до пропорциональности уравнения, задающего данную содержательную кривую второго порядка.
37. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Асимптотические и неасимптотические направления. Примеры.
38. Диаметры кривых второго порядка, сопряжённые неасимптотическим направлениям. Пучок диаметров.
39. Центр кривой второго порядка: геометрическое и алгебраическое определения, их эквивалентность. Уравнения, задающие центр. Прохождение диаметра через центр.
40. Теорема о дважды сопряжённом неасимптотическом направлении для центральной кривой второго порядка. Направления диаметров параболы.
41. Особые и неособые точки кривых второго порядка. Касательная к кривой второго порядка в её неособой точке. Уравнение касательной.
42. Метрическая и аффинная классификации содержательных кривых второго порядка.
43. Лемма о наличии у симметрической матрицы размера 3×3 ортонормированного базиса собственных векторов (без доказательства). Теорема о приведении поверхности второго порядка (квадрики в пространстве) к каноническому виду.
44. Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Плоские сечения поверхностей второго порядка. Примеры.
45. Геометрические свойства нецилиндрических поверхностей второго порядка. Стремление гиперboloида к своему асимптотическому конусу.

46. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. Теорема о скрещивании прямолинейных образующих одного семейства.
47. Особые и неособые точки поверхностей второго порядка. Касательные прямые и плоскости в неособых точках. Пересечение поверхности второго порядка со своей касательной плоскостью.
48. Проективная плоскость. Пополнение аффинной плоскости и модель связки. Перспективное соответствие.
49. Проективные (однородные) координаты на проективной плоскости. Переход от проективных координат к аффинным и обратно.
50. Кривые второго порядка на проективной плоскости. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в проективных координатах. Овалы. Теорема о простейшем виде, к которому можно привести кривую второго порядка на проективной плоскости (без доказательства).