Вариант С0.

1. Точка A лежит на прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, причем A равноудалена от точек $B(3,0,-2)$ и $C(-1,1,5)$. Найти координаты точки A.

2. Составить уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла между плоскостями $x-z-5=0$ и $3x+5y+4z=0$.

3. Найти канонический вид кривой $5x^2+2xy+5y^2-12x+20y+32=0$.

4. Составить уравнение эллипса, зная его центр $C(2,1)$ и концы двух сопряженных диаметров $A(5,1), B(0,3)$.

5. Найти канонический вид поверхности

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$$

и определить ее тип. Найти начало и базисные векторы канонической системы координат.

6. Написать уравнение гиперболического цилиндра с асимптотическими плоскостями $x+y-z=1$ и $2x-y+z=2$, проходящего через точку $A(1,-1,2)$.

Решения.

1. *Решение.* Произвольная точка данной прямой имеет координаты $(3+2t,3t,1-t)$. Найдем параметр t из условия равенства длин отрезков $AB=\sqrt{(2t)^2+(3t)^2+(3-t)^2}$ и $AC=\sqrt{(4+2t)^2+(-1+3t)^2+(-4-t)^2}$. Следовательно

$$(2t)^2+(3t)^2+(3-t)^2=(4+2t)^2+(-1+3t)^2+(-4-t)^2 \iff 14t^2-6t+9=14t^2+18t+33 \iff t=-1.$$

То есть искомая точка A имеет координаты $(1,-3,2)$.

Ответ. $A(1,-3,2)$.

2. *Решение 1.* Любая точка биссекторной плоскости равноудалена от двух данных плоскостей. Следовательно любая точка $M(x,y,z)$, лежащая на искомой биссекторной плоскости, удовлетворяет уравнению $\dfrac{|x-z-5|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|3x+5y+4z|}{5\sqrt{2}}$, то есть $5|x-z-5|=|3x+4y+5z|$. Чтобы получить необходимое уравнение плоскости осталось выяснить как раскрываются знаки модулей: с одним знаком или с разными. Нормали $(1,0,-1)$ и $(3,4,5)$ направлены в положительные полупространства относительно соответствующих плоскостей и образуют тупой угол, так как их скалярное произведение отрицательно. Следовательно двугранный угол, образующийся при пересечении положительных полупространств, острый, так как он дополняет указанный угол между нормалями до π. А значит модули необходимо раскрывать с одинаковыми знаками и искомое уравнение биссекторной плоскости $2x-4y-10z-25=0$.

Решение 2. Векторы $(1,0,-1)$ и $(3,4,5)$ являются нормальными векторами к данным плоскостям. Их длины равны $\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$ соответственно. Умножим первый вектор на 5, тем самым мы нашли два вектора $\mathbf{n}_1(5,0,-5)$ и $\mathbf{n}_2(3,4,5)$, которые имеют равную длину и нормальны к исходным плоскостям. Нормальный вектор к искомой плоскости это один из векторов вида $\mathbf{n}_1 \pm \mathbf{n}_2$. Угол между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ тупой, а значит нормальный вектор к искомой плоскости это их разность, то есть вектор $(2,-4,-10)$. Рассмотрим какую-нибудь точку, лежащую на линии пересечения исходных плоскостей. Для этого найдем какое нибудь решение системы $\begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$. Например, возьмем точку $A(5, -\frac{15}{4}, 0)$. Нужная нам плоскость проходит через точку A имеет нормаль $(2,-4,10)$, то есть задается уравнением $2x - 4y - 10z + D = 0$. Подставляя точку A, находим, что $D = -25$.

Решение 3. Биссекторная плоскость лежит в пучке, определяемом исходными плоскостями, а значит ее уравнение выражается в виде линейной комбинации их уравнений с коэффициентами λ и μ, то есть имеет вид $(\lambda + 3\mu)x + 4\mu y + (-\lambda + 5\mu)z - 5\lambda = 0$. Нормальный вектор $\mathbf{n}(\lambda + 3\mu, 4\mu, -\lambda + 5\mu)$ должен образовывать равные или дополняющие друг друга до π углы с нормалями $\mathbf{n}_1(1,0,-1)$ и $\mathbf{n}_2(3,4,5)$ к исходным плоскостям. Для этого должно выполняться равенство

$$\frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1)|}{|\mathbf{n}_1|} = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{n}_2)|}{|\mathbf{n}_2|},$$

то есть $\dfrac{|2\lambda - 2\mu|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|50\mu - 2\lambda|}{5\sqrt{2}}$ или $\lambda = \pm 5\mu$. Можно взять $\lambda = 5, \mu = \pm 1$ и тогда нормальный вектор $\mathbf{n}$ имеет вид $(8,4,0)$ или $(2,-4,-10)$. Первый вектор задает биссекторную плоскость тупого угла, так как угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ лежит в промежутке $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$, так как $\cos\angle(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1) = \frac{2}{\sqrt{10}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит нам подходит плоскость с $\lambda = 5, \mu = -1$, которая задается уравнением $2x - 4y - 10z - 25 = 0$.

Ответ. $2x - 4y - 10z - 25 = 0$.

3. *Решение.* Воспользуемся ортогональными инвариантами. Для данной кривой

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 10; \quad I_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 24; \quad I_3 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = -32.$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ являются числа $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$ (корни характеристического уравнения одного знака, значит искомая кривая это эллипс, мнимый эллипс или пара мнимых пересекающихся кривых, а для этих кривых в каноническом уравнении первый корень, то есть коэффициент при $(x')^2$, должен быть меньше по модулю). Таким образом в канонической системе координат $O'x'y'$ уравнение кривой примет вид $4(x')^2 + 6(y')^2 + \mu = 0$, где параметр μ можно найти из соотношения $\mu = \frac{I_3}{I_2} = -\frac{4}{3}$. После перенесения свободного члена в правую часть и соответствующего домножения на константу уравнение примет канонический вид эллипса

$$\frac{(x')^2}{\frac{1}{3}} + \frac{(y')^2}{\frac{2}{9}} = 1.$$

Ответ. $\frac{(x')^2}{1/3} + \frac{(y')^2}{2/9} = 1.$

4. *Решение 1.* В системе координат $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ данный эллипс задается уравнением $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Формулы замены координат имеют вид

$$\begin{cases} x = 3x' - 2y' + 2 \\ y = 2y' + 1 \end{cases}.$$

Выразим конечные координаты через исходные: $x' = \dfrac{x+y-3}{3}, y' = \dfrac{y-1}{2}$. Подставим в полученное уравнение, домножим на знаменатель, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$4x^2 + 8xy + 13y^2 - 24x - 42y + 9 = 0.$$

Данное уравнение и будет задавать эллипс в исходной системе координат.

Решение 2. Пусть искомый эллипс задается уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$. Найдем несколько соотношений на коэффициенты этого уравнения:

- Точки A и B лежат на эллипсе, то есть выполнены равенства

$$25a_{11} + 10a_{12} + a_{22} + 10a_1 + 2a_2 + a_0 = 0, \quad 9a_{22} + 6a_2 + a_0 = 0.$$

- Точка C является центром эллипса, а значит ее координаты дают решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases},$$

  то есть

$$2a_{11} + a_{12} + a_1 = 2a_{12} + a_{22} + a_2 = 0.$$

- Направления векторов $\overrightarrow{CA}(3,0)$ и $\overrightarrow{CB}(-2,2)$ сопряжены относительно данного эллипса, то есть

$$(3 \quad 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 6(a_{12} - a_{11}) = 0.$$

Таким образом у нас есть система из пяти линейных однородных уравнений с шестью неизвестными $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$ и этого достаточно чтобы определить уравнение эллипса, так как в случае если уравнения данной системы независимы (а позже мы увидим, что так и есть на самом деле), то фундаментальная система решений одномерна и решение определено с точностью до домножения на константу, а при домножении на константу уравнения кривой сама кривая не изменяется.

Решим данную систему

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} = 0 \\ 2a_{11} + a_{12} + a_1 = 0 \\ 2a_{12} + a_{22} + a_2 = 0 \\ 9a_{22} + 6a_2 + a_0 = 0 \\ 25a_{11} + 10a_{12} + a_{22} + 10a_1 + 2a_2 + a_0 = 0 \end{cases}$$

методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 25 & 10 & 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 35 & 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Обратным ходом метода Гаусса получаем шестерку решений $(4, 4, 13, -12, -21, 9)$.

Отметим, что данное для данного решения необходимо сделать гораздо больше выкладок и вычислений чем в первом решении.

Ответ. $4x^2 + 8xy + 13y^2 - 24x - 42y + 9 = 0$.

5. *Решение.* Найдем все центры данной поверхности, они ищутся из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 2 = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{array} \right. .$$

Центрами данной поверхности являются все точки прямой $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 2 = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right.$, которая задается каноническим уравнением $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$. Следовательно любая точка этой прямой может быть началом канонической координат, а третий базисный вектор канонической системы будет направляющим вектором этой прямой.

Найдем корни характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Корнями будут $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$, причем i-й корень будет соответствовать i-му направлений канонической системы координат, в частности $\lambda_3 = 0$ соответствует линии центров данной поверхности.

Найдем соответствующие собственные векторы квадратичной части данной поверхности, при этом векторы мы будем искать векторы единичной длины, так как каноническая система координат должна быть прямоугольной:

- $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть первым базисным вектором канонической системы координат будет $\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

- $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

  то есть вторым базисным вектором канонической системы координат будет $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

- $\lambda_3 = 0$. Третий базисный вектор это направляющий вектор линии центров, то есть, с учетом нормировки, $\mathbf{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Итого каноническая система координат найдена, осталось найти каноническое уравнение. Оно примет вид $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu = 0$, так как если бы вместо параметра μ было выражение вида kz', то поверхность была бы эллиптическим параболоидом и центров бы не имела. Чтобы найти μ достаточно подставить в левую часть любой и возможных центров, например $(-1, 0, -1)$. В канонической системе координат в левой части получится значение μ, так как центр имеет в ней координаты $(0, 0, z')$. А в исходной получится значение -4, следовательно $\mu = -4$ и исходная поверхность это эллиптический цилиндр с каноническим уравнением

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{4/3} = 1.$$

Ответ. Эллиптический цилиндр $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{4/3} = 1$.
$O'(-1, 0, -1), \mathbf{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{e}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \mathbf{e}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$

6. *Решение 1.* Рассмотрим какую-нибудь аффинную (не обязательно прямоугольную!) систему координат $O'x'y'z'$, в которой асимптотические плоскости искомого цилиндра имеют уравнения $x' = 0$ и $y' = 0$, а точка A координаты $(1, 1, 0)$. Тогда гиперболический цилиндр в данной системе координат будет иметь $x'y' = 1$.

Нам известны уравнения вида $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$ асимптотических плоскостей в обеих системах координат, а значит левые части этих уравнений отличаются домножением на ненулевую константу, то есть $\alpha x' = x + y - z - 1$ и $\beta y' = 2x - y + z - 2$. Подставляя координаты точки $A(1, -1, 2)$ и $(1, 1, 0)$ в старой и новой системах координат, получаем $\alpha = -3$ и $\beta = 3$. Следовательно $x' = -\dfrac{x + y - z - 1}{3}$ и $y' = \dfrac{2x - y + z - 2}{3}$ и уравнение нужного цилиндра имеет вид $\dfrac{(x + y - z - 1)(2x - y + z - 2)}{9} = -1$, что после раскрытия скобок примет вид

$$2x^2 - y^2 - z^2 + xy - xz + 2yz - 4x - y + z + 11 = 0.$$

Замечание. Рассматриваемая система координат существует если данная точка не лежит на асимптотических плоскостях. Для этого достаточно в качестве третьей координатной плоскости $z' = 0$ (первые две это асимптотические плоскости цилиндра) взять любую плоскость, проходящую через A и не параллельную линии пересечения асимптотических плоскостей. Осталось только выбрать первые два базисных вектора, чтобы A имела в новой система координат вид $(1, 1, 0)$.

Решение 2. Данное решение возможно только в случае когда система координат прямоугольная. Воспользуемся тем свойством гиперболы, что для любой ее точки произведение расстояний до асимптот постоянное. Аналогичное утверждение будет верно и для точек гиперболического цилиндра и асимптотических плоскостей. Для данной точки A произведение расстояний до асимптотических плоскостей равно $\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, кроме того знаки подстановок точки A уравнения асимптотических плоскостей различны. Следовательно, точка (x, y, z) принадлежит гиперболическому цилиндру в том и только том случае, когда произведение расстояний от нее до асимптотических плоскостей равно $\frac{3}{\sqrt{2}}$ и подстановки этой точки в уравнения плоскостей разного знака, то есть $-\frac{x+y-z-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2x-y+z-2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, или

$$2x^2 - y^2 - z^2 + xy - xz + 2yz - 4x - y + z + 11 = 0.$$

Ответ. $2x^2 - y^2 - z^2 + xy - xz + 2yz - 4x - y + z + 11 = 0.$