

Вопросы к экзамену по курсу «Аналитическая геометрия»

Лектор И.А.Дынников

осенний семестр 2010 г.

1. Геометрическое определение эллипса, параболы и гиперболы. Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения.
2. Оптическое свойство коник.
3. Аналитическое определение эллипса, параболы и гиперболы. Его совпадение с геометрическим определением. Асимптоты гиперболы.
4. Директориальное свойство коник. Уравнения коник в полярных координатах.
5. Свойства операций над векторами. Линейные комбинации. Линейная зависимость и независимость векторов.
6. Базис. Понятие аффинной системы координат. Деление отрезка в данном отношении.
7. Скалярное произведение и его свойства. Формула для скалярного произведения в аффинной системе координат. Прямоугольные системы координат.
8. Выражение площади параллелограмма и объема параллелепипеда через скалярное произведение.
9. Матрица перехода между базисами. Геометрический смысл ее определителя.
10. Ориентация плоскости и пространства. Ориентированная площадь и ориентированный объем. Их свойства.
11. Совпадение ориентаций базисов как критерий их непрерывной деформируемости друг в друга.
12. Векторное и смешанное произведения. Определения, свойства и формулы в прямоугольной положительно ориентированной системе координат.
13. Прямая на плоскости. Параметрические уравнения прямой. Прямая как линия первого порядка.
14. Аффинное свойство многочлена первого порядка. Связь отношения, в котором точка пересечения с прямой делит отрезок, и расстояния от прямой до его концов. Полу-плоскости. Условие параллельности вектора и прямой, заданной общим уравнением.
15. Взаимное расположение прямых на плоскости. Пучки прямых на плоскости. Условия принадлежности пучку.
16. Формулы в прямоугольных координатах для расстояния от точки до прямой, расстояния между прямыми, угла между прямыми.

17. Плоскость в пространстве. Параметрические уравнения и задание в общем уравнении.
18. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Пучки плоскостей. Условия принадлежности пучку.
19. Связка плоскостей в пространстве. Условия принадлежности плоскости связке.
20. Формулы для расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями и угла между плоскостями в пространстве в прямоугольной системе координат.
21. Прямая в пространстве. Параметрическое задание и задание системой двух уравнений. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
22. Формулы для расстояния от точки до прямой и расстояния между скрещивающимися прямыми в пространстве.
23. Формулы перехода между аффинными системами координат. Ортогональные матрицы. Общий вид ортогональной матрицы размера 2×2 .
24. Углы Эйлера.
25. Алгебраические кривые на плоскости. Независимость порядка кривой от выбора аффинной системы координат. Квадрики.
26. Формулировка теоремы ортогональной классификации квадрик. Приведение уравнения квадрики к каноническому виду.
27. Ортогональные инварианты многочлена второй степени на плоскости.
28. Ортогональный полуинвариант многочлена второй степени на плоскости. Единственность канонического вида квадрики.
29. Единственность кривой второго порядка, проходящей через пять точек. Ортогональная классификация существенных квадрик.
30. Теорема Паскаля.
31. Пересечение прямой и квадрики. Асимптотические направления кривой второго порядка, их геометрический смысл.
32. Диаметры кривой второго порядка, их геометрический смысл. Сопряженные направления. Взаимно сопряженные диаметры.
33. Центры кривых второго порядка. Уравнения центров и связь с диаметрами.
34. Особые точки кривой второго порядка. Касательные к кривым второго порядка.

35. Сопряженность точек относительно кривой второго порядка. Поляра точки и полюс прямой относительно квадрики. Теорема Бриансона.
36. Главные диаметры кривой второго порядка и ее оси симметрии.
37. Аффинная классификация квадрик. Метод Лагранжа.
38. Поверхности второго порядка. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду ортогональной заменой координат.
39. Ортогональные инварианты многочлена второй степени от трех переменных.
40. Ортогональные полуинварианты многочлена второй степени от трех переменных. Ортогональная классификация поверхностей второго порядка.
41. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида.
42. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида.
43. Центры и диаметральные плоскости поверхности второго порядка.
44. Поверхности вращения второго порядка.
45. Касательная плоскость к поверхности второго порядка в неособой точке. Необходимое условие касания данной плоскости и поверхности второго порядка с инвариантом I_4 , отличным от нуля.
46. Плоские сечения поверхности второго порядка. Нахождение инвариантов сечения по уравнениям поверхности и плоскости.
47. Сечение поверхности касательной плоскостью. Необходимое условие касания данной плоскости и поверхности второго порядка в общем случае.
48. Определение аффинного преобразования. Запись аффинного преобразования в координатах.
49. Изменение матрицы аффинного преобразования при переходе из одной аффинной системы координат в другую.
50. Изометрические преобразования. Критерии изометричности преобразования.
51. Преобразования сжатия-растяжения вдоль взаимно перпендикулярных направлений и их матрицы.
52. Теорема о строении произвольного аффинного преобразования.
53. Теорема Шаля о классификации движений плоскости.

54. Классификация движений пространства.
55. Параметризация Кэли–Клейна группы $SO(3)$.
56. Проективная прямая. Двойное отношение. Дробно-линейные преобразования.
57. Проективная плоскость как пополнение аффинной. Модель связки проективной плоскости. Задание проективного соответствия образами четырех точек.
58. Проективные системы координат. Запись проективных преобразований в координатах.
59. Кривые второго порядка на проективной плоскости. Проективная классификация квадрик.
60. Рациональная параметризация овалов.
61. Аффинные преобразования комплексной прямой, их геометрический смысл.
62. Комплексная проективная прямая. Геометрические свойства проективных преобразований комплексной прямой.