ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО МИНИМУМА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.04 (ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ)

1. Общая топология

Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категориях.

Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (отрыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и C^k–топология в пространстве гладких отображений).

Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций.

Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения. Расширения Чеха-Стоуна. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в $\mathbb{R}^n$.

Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами.

Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности.

Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество и ковер Серпинского и их хаусдорфова размерность.

2. Алгебраическая топология

Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары. Вычисление k-мерных гомотопических групп n-мерной сферы для $k \leq n$.

Пространства Эйленберга-Маклейна. H-пространства и группа гомотопических классов отображений в H-пространство. Коммутативность фундаментальной группы H–пространств.

Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные разбиения пространств. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, из связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Оператор Бокштейна. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения). Двойственность Пуанкаре для многообразий.

Теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Обобщенные теории гомологий и когомологий. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна. Кольцо когомологий H–пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел.

Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана.

Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей.

Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях.

Характеристические классы векторных расслоений. Понятие группы $K(X)$.

3. Топология гладких многообразий

Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса. Перестройки в многообразиях. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий.

Вложения и погружения. Теорема Уитни. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка). Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса-Бонне. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа.

Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера-Пуанкаре.

Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления.

Исчисление струй. Топологии Уитни в пространствах гладких отображений. Теоремы трансверсальности. Теорема трансверсальности Тома и ее следствия: лемма Морса, слабая теорема Уитни. Локальная классификация устойчивых отображений $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Число Милнора изолированной особенности функции.

4. Топология малых размерностей

Узлы и зацепления. Движения Радемайстера. Полином Александера узла. Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей. Примеры трехмерных многообразий. Склейка потноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий.

5. Дифференциальная геометрия

Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы.

Риманова метрика и римановы многообразия. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика.

Понятие тензора и тензорного поля на гладком многообразии. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли.

Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование.

Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства) Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре.

Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами.

Параллельный перенос и геодезические. Геодезические как кратчайшие. Формула Эйлера-Лагранжа. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского, поверхности вращения. Сопряженные точки и индекс геодезической.

Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки. Характеристические классы и характеристические числа. Теорема Стокса и инвариантность характеристических чисел относительно бордизма.

Проективная двойственность и преобразования Лежандра.

6. Геометрический структуры на гладких многообразиях

Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии.

Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем.

Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса.

7. Геометрия групп Ли и однородных пространств

Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях. Односвязные и неодносвязные группы Ли. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы $U(n)/O(n)$ и $U(n)/SO(n)$. Компактные группы Ли и биинвариантная метрика. Кольцо когомологий компактной группы Ли. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли.

8. Дискретная и комбинаторная геометрия

Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне.

Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости.

Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней.