ПРОГРАММА-МИНИМУМ
кандидатского экзамена по специальности
01.01.04 - геометерия и топология

1. Общая топология

Часть 1

1. Теорема Тихонова о компактности произведения компактных пространств. Компактификация Чеха--Стоуна. Одноточечная компактификация Александрова локально компактного пространства. [Ал]
2. Лемма Шпернера о раскраске. Теорема Брауэра о барабане (граничная сфера не является ретрактом шара). [АП] Гл. 3 §§ 3,4.
3. Лебегово определение размерности. Канторово множество. Негомеоморфность R^n и R^k
4. Метризуемые топологические пространства. Метризационный критерий Нагаты-Смирнова

Часть 2

1. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами.
2. Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности.
3. Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность.

2. Алгебраическая топология

Часть 1

1. Гомотопия и гомотопическая эквивалентность. Фундаментальная группа топологического пространства. Теорема ван Кампена. [ФФ] Гл. 1 §§3,6, [Ха] §1.1.
2. Клеточные пространства (CW-комплексы). Задание фундаментальной группы клеточного пространства образующими и соотношениями. [ФФ] Гл. 1 §§5,6, [Ха] §1.2.
3. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Регулярные накрытия, классификация накрывающих пространств. [ФФ] Гл. 1 §7, [Ха] §1.3.
4. Локально-тривиальные расслоения. Свойство накрывающей гомотопии. Расслоения в смысле Серра и Гуревича. Пространства путей, петель и свободных петель. [ФФ] Гл. 1 §9, [Ха] Гл. 4.

5. Гомотопические группы. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Расслоение Хопфа. Гомотопическая классификация отображений S^3 в S^2. [ФФ] Гл. 1 §§8,9, [Ха] Гл. 4.
6. Симплициальные комплексы и группы симплициальных гомологий. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. [Ха] §2.1, §2.A.
7. Сингулярные гомологии и когомологии. Естественность, гомотопическая инвариантность, точная последовательность Майера-Виеториса. [ФФ] Гл. 2 §§12,15, [Ха] §§2.1, 3.1.
8. Клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомологии вещественных и комплексных проективных пространств. [ФФ] Гл. 2 §13, [Ха] §2.2.

Часть 2

1. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Точная последовательность пары. Оператор Бокштейна
2. Умножение в когомологиях. Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Двойственность Пуанкаре для многообразий.
3. Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Пространства Эйленберга-Маклейна. Группы когомологий как группы гомотопических классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна.
4. Клетки Шуберта и гомологии комплексных многообразий Грассмана. [ФФ] Гл. 2 §13, [МС2] §6.
5. H-пространства и группа гомотопических классов отображений в H-пространство. Коммутативность фундаментальной группы H-пространства.
6. Кольцо когомологий H-пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел.
7. Векторные расслоения. Операции с расслоениями: прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений; тензорные, симметрические, внешние степени, детерминантное расслоение. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения.
8. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях. Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца.
9. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения). Понятие о характеристических классах расслоений. Классы Штифеля-Уитни, Чженя и Понтрягина. Класс Эйлера.
10. Понятие о группе K(X) и периодичности Ботта. Группа K(X) как когомологический функтор .
11. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости.
12. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий

3. Топология гладких многообразий

Часть 1

1. Классификация замкнутых двумерных поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы компактных двумерных поверхностей. [МФ] Гл. 4 §5, [МС1] Гл.1 §10.
2. Римановы поверхности. Разветвленные накрытия, формула Римана-Гурвица.
3. Гладкие многообразия. Теория Морса. Критические точки. Лемма Морса. Основная теорема теории Морса. Операция приклейки ручки. Разложение многообразия на ручки. Неравенства Морса.[НТ] Гл. 5 §5.1,5.2, [ДНФ] Ч. 2 Гл. 1 §§1,2, [МФ] Гл. 3.
4. Векторные расслоения над многообразиями. Касательное и нормальное расслоение. Прямая сумма и тензорное произведение расслоений. [Ми] Гл. 1 §3.
5. Векторные поля на многообразиях. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Коммутатор векторных полей. Производная Ли.[НТ] Гл. 8 §8.3, [Ар] Гл. 8 §39.
6. Вложения и погружения. Критические и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. [ДНФ] Ч. 2 Гл. 2 §§10,11, [МФ] Гл. 3 §4.
7. Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя. Степень отображения и интеграл. Индекс особой точки векторного поля, Теорема Эйлера-Пуанкаре. [ДНФ] Ч. 2 гл. 3 §§13,14, [МФ] Гл. 6 §3.
8. Понятие о трансверсальном отображении, прообраз подмногообразия. Теорема трансверсальности. [ДНФ] Ч. 2 Гл. 2 §10.

Часть 2

1. Кольца когомологий двумерных поверхностей
2. Гомотопическая классификация отображений замкнутого ориентированного n-мерного многообразия в n-мерную сферу(добавил)
3. Простые и сложные функции Морса. Представление многообразия в виде клеточного комплекса, связанного с функцией Морса.
4. Перестройки многообразий. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий.
5. Исчисление струй. Топология Уитни в пространствах гладких отображений. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции.
6. Двойственность Александера.
7. Индексы пересечения и зацепления.

4. Дифференциальная геометрия

Часть 1

1. Фундаментальные уравнения теории подмногообразий в евклидовом пространстве: уравнения Гаусса, Кодацци, Риччи. Теорема Гаусса (Egregium), теорема Бонне. [НТ] Гл. 3 §3.4.
2. Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. [НТ] Гл. 9 §§9.1,9.2, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 3 §18, Гл. 4 §26, Ч. 2 Гл. 2 §8. [МФ] Гл. 5 §5, Гл. 6 §2.
3. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Лемма Пуанкаре. Отображение в когомологиях, индуцированное гладким отображением. Теорема о совпадении когомологий де Рама и сингулярных когомологий. [НТ] Гл. 9 §9.3, [МФ] Гл. 6 §1. [Уо] Гл. 5.
4. Ковариантное дифференцирование. Симметрическая риманова связность. Индуцированная связность на подмногообразии риманова многообразия (связность Леви-Чивита) Запись ковариантной производной и ее свойств в координатах и в инвариантной форме [НТ] Гл. 10 §10.1, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 4 §§28,29, [МФ] Гл. 5 §§7,8.
5. Тензор кривизны. Координатная и инвариантная формы записи. Критерий локальной евклидовости римановой метрики. Тензор Риччи и скалярная кривизна. [НТ] Гл. 10 §10.2, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 4 §30, [МФ] Гл. 5 §10.
6. Параллельный перенос и геодезические на многообразии. Теоремы о существовании и единственности геодезических. [ДНФ] Ч. 1 Гл. 4 §29, [МФ] Гл. 5 §9.
7. Вариационная природа геодезических. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Геодезические как экстремали функционалов энергии и длины. [ДНФ] Ч. 1 Гл. 5 §31, [МФ] Гл. 7 §§2-4.
8. Модели геометрии Лобачевского, описание геодезических в них. Различные формы записи метрик плоскости Лобаческого и сферы, соответствующие описания групп движений. [НТ] Гл. 4 §4.3, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 2 §13, [МФ] Гл. 1 §4, Гл. 5 §9.
9. Группы и алгебры Ли. Экспоненциальное отображение. Присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Примеры: классические матричные группы. [НТ] Гл. 5 §5.2, Гл. 6 §6.1, [МФ] Гл. 4 §3, [Ар] Гл. 8, §39.
10. Левоинвариантные метрики на группах Ли. Геодезические левоинвариантных метрик. Тензор кривизны.
11. Комплексные и кэлеровы многообразия. Метрика Фубини-Штуди на комплексном проективном пространстве. [НТ] Гл. 11 §11.2, [ГХ] Гл. 0.
12. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. [НТ] Гл. 11 §11.2, Гл. 13 §13.1, [Ар] Гл. 8 §37, 41, [ГХ] Гл. 0.
13. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы

гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля об инвариантных торах. [НТ] Гл. 13 §13.1, [Ар] Гл. 8 §40.

14. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса

Часть 2

1. Теорема Клеро. Геодезические метрики Лиувилля.
2. Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре.
3. Тензор Риччи трехмерного многообразия.
4. Гладкие локально тривиальные расслоения. Сечения. Векторные расслоения. Связности в расслоениях, группы голономии, форма кривизны, тождество Бьянки.
5. Характеристические классы. Конструкция Чженя-Вейля. Характеристические числа, их инвариантность относительно бордизма.
6. Проективная двойственность, преобразования Лежандра.
7. Поля Якоби, первая и вторая вариации, сопряженные точки, индекс геодезической.
8. Пример нематричной группы Ли.
9. Компактные группы Ли и биинвариантная метрика. Кольцо когомологий де Рама компактной группы Ли, связь с алгеброй Ли. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли.
10. Полупростые алгебры Ли. Картановские подалгебры. Корни и корневое разложение полупростой алгебры Ли. Системы корней простых алгебр Ли.
11. Присоединенное и коприсоединенное представление. Орбиты коприсоединенного представления. Орбиты общего положения и сингулярные орбиты.
12. Уравнения Эйлера на алгебрах Ли. Основные свойства. Примеры.
13. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы.
14. Симметрические пространства. Основные примеры.
15. Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления. Гамильтоновость уравнений Эйлера.
16. Теорема Лиувилля о полной интегрируемости (существование переменных действие-угол).
17. Некоммутативная интегрируемость. Алгебры Ли интегралов.
18. Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры .
19. Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне.
20. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости. Группы симметрий бордюров, классификация.
21. Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней.

Список литературы

[Ал] П.С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* Москва, Наука, 1977.
[АП] П.С. Александров, Б.А. Пасынков. *Введение в теорию размерности*. Москва, Наука, 1973.
[Ар] В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики*. Москва, Наука, 1989.
[ВИНМ] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. *Элементарная топология.* Москва, МЦНМО, 2010.
[ГХ] Ф.Гриффитс, Дж.Харрис. *Принципы алтеграической геометрии*, в 2 т. Москва, Мир, 1982.
[ДНФ1] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия*. Части 1, 2. Москва, Наука, 1986.
[ДНФ2] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия.* Часть 3 (Методы теории гомологий). Москва, Наука, 1984.
[КН] Ш. Кобаяси, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии*, в 2 т. Москва, Наука, 1981.
[МС1] У.Масси, Дж.Столлингс. *Алгебраическая топология. Введение*. Москва, Мир, 1977.
[МС2] Дж.Милнор, Дж.Сташеф. *Характеристические классы*. Москва, Мир, 1979.
[Ми] А.С. Мищенко. *Векторные расслоения и их применения*. Москва, Наука, 1984.
[МФ] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. *Курс дифференциальной геометрии и топологии.* СПб., Лань, 2010.
[НТ] С.П. Новиков, И.А.Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля*. Москва, МЦНМО, 2005.
[Уо] Ф.Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. Москва, Мир, 1987.
[ФФ] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* Москва, Наука, 1989.
[Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.
[Ци] Г.Циглер. *Теория многогранников*. Москва, МЦНМО, 2014.