Преобразование Фурье-Мукаи для вейерштрассовых кубик и коммутирующие ОДО

В докладе я расскажу о решении одной проблемы Превиато-Вилсона о характеризации спектральных пучков алгебр коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов.

Как известно, всякая нетривиальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{D} = \mathbb{C}[[x]][\partial]$ конечно порождена и имеет размерность Крулля один. Аффинная кривая $X_0 = \mathsf{Spec}(\mathfrak{B})$ допускает одноточечную компактификацию гладкой точкой p до проективной кривой X. Кроме того, алгебра $\mathfrak{B}$ определяет когерентный пучок без кручения $\mathcal{F}$ на кривой X, характеризующийся следующими свойствами:

- Для любой точки $q \in X_0$ (регулярной или особой), соответствующей гомоморфизму алгебр $\mathfrak{B} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$, имеются изоморфизмы векторных пространств
$$\mathcal{F}\big|_q^* \to \big\{f \in \mathbb{C}[[x]] \,|\, P \circ f = \chi(P) f \text{ for all } P \in \mathfrak{B}\big\}.$$
- Отображение вычисления $H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mathsf{ev}_p} \mathcal{F}\big|_p$ — изоморфизм, и $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Кривая X (соответственно, пучок $\mathcal{F}$) называется *спектральной кривой* (соответственно, *спектральным пучком*) алгебры $\mathfrak{B}$. Ранг пучка без кручения $\mathcal{F}$ называется *рангом* $\mathfrak{B}$. Согласно теореме Кричевера [4], всякая нетривиальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{B}$ *ранга один* по существу определяется своими спектральными данными $(X, p, \mathcal{F})$. Классификация коммутативных подалгебр в $\mathfrak{D}$ более высокого ранга гораздо сложнее, хотя основные ингредиенты $(X, p, \mathcal{F})$ также фигурируют среди классифицирующих параметров. Эта классификация появилась в работах Кричевера [2, 3, 4], и затем усовершенствовалась многими авторами: Дринфельдом, Мамфордом, Сигалом и Вилсоном, Вердье, Муласе и другими.

Полное описание алгебр рода 1 и ранга 2 было дано Кричевером и Новиковым [5] для случая гладкой спектральной кривой. Нетрудно показать, что для любой (нормализованной) коммутативной подалгебры рода один и ранга два $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ существуют два оператора $L, M \in \mathfrak{B}$, такие что $\mathfrak{B} = \mathbb{C}[L, M]$ и

$$(1) \quad L = \partial^4 + a_2\partial^2 + a_1\partial + a_0, \quad M = 2L_+^{\frac{3}{2}}, \quad M^2 = 4L^3 + g_2 L + g_3$$

для некоторых $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$. Здесь оператор $L^{\frac{3}{2}}$ берется в алгебре псевдо-дифференциальных операторов $\mathbb{C}[[x]]((\partial^{-1}))$, и $L_+^{\frac{3}{2}}$ — проекция $L^{\frac{3}{2}}$ на $\mathfrak{D}$. Описание всех возможных операторов L вида (1), удовлетворяющих ограничению $[L, M] = 0$ для $M = 2L_+^{\frac{3}{2}}$ было получено Грюнбаумом в [1]; в частности, им были получены явные формулы компактного вида для коэффициентов a_0, a_1 и a_2. Возникает естественный вопрос:

Проблема. Как вычислить пучок $\mathcal{F}$ алгебры $\mathfrak{B} = \mathbb{C}[L, P]$ рода один и ранга два в терминах коэффициентов a_0, a_1 и a_2?

Превиато и Вилсон дали исчерпывающий ответ на этот вопрос в случае гладкой кривой X [6, Theorem 1.2].

Та же проблема для особых кривых оказывается эффективно разрешимой с помощью преобразования Фурье-Мукаи на вейерштрассовых кубиках. Кроме вычисления спектральных пучков, оказывается возможным получить описание прямых образов пучков без кручения на рациональных особых кривых.

Доклад основан на одноименной работе с Игорем Бурбаном.

Список литературы

[1] F. Grünbaum, *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six*, Phys. D **31** (1988), 424–433.

[2] I. Krichever, *An algebraic–geometric construction of the Zakharov–Shabat equations and their periodic solutions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **227** (1976), no. 2, 291—-294.

[3] I. Krichever, *Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), no. 6 (198), 183–208, 287.

[4] I. Krichever, *Commutative rings of ordinary linear differential operators*, Func. Anal. Appl. **12** no. 3 (1978), 175–185.

[5] I. Krichever, S. Novikov, *Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations*, Russian Math. Surveys, **35**:6 (1980), 47–68.

[6] E. Previato, G. Wilson, *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves*, Compositio Math. **81** (1992), 107–119.