Энергия узлов и нормальные формы узлов и плоских кривых

А.Б.Сосинский,
(Независимый Московский Университет)

В докладе будет показано, что узлы и плоские кривые, как и многие другие математические объекты, можно классифицировать, приводя их к “нормальной форме”. Под *нормальной формой* узла (или плоской кривой) мы понимаем тот вид этого узла (кривой), который доставляет минимум некоторого специально выбранного “фунционала энергии”.

Для любой регулярной $\mathcal{C}^2$ кривой, мы в качестве функционала выбираем *функционал Эйлера* $E(\gamma)$, равный интегралу вдоль кривой γ квадрата её кривизны. Чтобы получить нормальную форму, находятся критические точки, а затем и точки минимума E. Доказано (в совместной работе с О.Карпенковым), что *точкам минимума отвечают окружности, пройденные один раз или многократно, и некоторая кривая, имеющая форму восьмерки* (*пройденная однократно*).

Этот результат, который является решением задачи, поставленной Эйлером в 1774 году, получен в совместной работе с О.Карпенковым и, независимо от нас, притом совершенно другим методом, Ю.Сочковым (2012 г.)

Из этого результата следует классическая теорема Уитни о классификации регулярных кривых с точностью до регулярной гомотопии. При этом нами (в совместной работе с С.Аввакумовым) разработан алгоритм, реализованный в виде компьютерной анимации, показывающей в реальном времени как любая кривая гомотопируется в свою нормальную форму. Пару таких мультфильмов будут продемонстрированы на докладе.

Для узлов $k : S^1 \to R^3$, в качестве функционала энергии мы используем сумму $F(k) = T(k) + R(r)$ функционала Эйлера $E(k)$ и простого *отталкивающего функционала* $R(k)$, который препятствует самопересечению кривой, задающей узел. Функционал F применяется не к гладким узлам, а к ломанным, и строится алгоритм, изотопирующий любой узел к его нормальной форме методом градиентного спуска. Будут продемонстрированы мультфильмы, показывающие соответсвующие изотопии в реальном времени.

В заключении мы обсудим, в какой мере этот алгоритм дает практическое решение проблемы классификации узлов и сравним наши теоретические нормальные формы с экспериментальными нормальными формами, полученными физическими экспериментами с узлами из гибкой проволоки. Несколько экспериментов будут показаны на докладе.