# О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ТИПЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ КОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРОКОЛАМИ

Д. В. Гугнин

Доклад основан на недавнем препринте автора arXiv: 1606.00453v2.

Пусть $M^2_{g,k}$ и $M^2_{g',k'}$ — компактные римановы поверхности с проколами ($g, g' \geq 0$ — рода, $k, k' \geq 1$ — количество проколов). Для любого Хаусдорфова пространства $X$ фактор-пространство $\mathrm{Sym}^n X := X^n/S_n$ есть $n$-я симметрическая степень $X$, $n \geq 2$. Хорошо известно, что $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ является гладким квази-проективным многообразием. Открытые многообразия $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ и $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}$ являются гомотопически эквивалентными тогда и только тогда, когда $2g + k = 2g' + k'$.

**Гипотеза.** *Пусть даны $n \geq 2$ и две пары $(g, k)$ и $(g', k')$ с условием $2g + k = 2g' + k'$. Тогда если $g \neq g'$, то открытые многообразия $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ и $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}$ негомеоморфны.*

Эта гипотеза была сформулирована в 2003 году сербскими математиками P. Blagojević, V. Grujić и R. Živaljević в статье, в которой и была ими доказана в случае $n \leq 2\max(g, g')$ (в частности, для $n = 2$). Авторы гипотезы использовали вычисление чисел Бетти открытого многообразия $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ на бесконечности. А именно, они показали, что $n$-е числа Бетти (на бесконечности) многообразий $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ и $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}$ различны, если $n \leq 2\max(g, g')$.

В той же статье показано, что все числа Бетти (на бесконечности) многообразий $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ и $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}$ совпадают при $n > 2\max(g, g')$. Насколько известно автору, Гипотеза в случае $n > 2\max(g, g')$ оставалась открытой (в ответ на мой запрос, R. Živaljević подтвердил это).

Цель доклада — представить доказательство данной гипотезы. Отметим, что наше доказательство не использует результат авторов гипотезы. Метод доказательства опирается на свойство *топологической* инвариантности классов Штифеля-Уитни открытых гладких многообразий конечного гомотопического типа. Хорошо известна *гомотопическая* инвариантность классов Штифеля-Уитни гладких замкнутых многообразий. Для открытых многообразий это свойство не имеет места: даже $w_1$ не является гомотопическим инвариантом (открытый цилиндр и открытый лист Мёбиуса). В доступных автору источниках он не нашел доказательства требуемой топологической инвариантности и получил доказательство данного свойства.

Доказательство гипотезы использует тот факт, что класс $w_2$ различает многообразия $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ и $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}$ во всех случаях. А именно, если $2g + k = 2g' + k'$ и $g \neq g'$, то при любом изоморфизме колец $\varphi : H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}_2) \to H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}; \mathbb{Z}_2)$ выполнено $\varphi(w_2(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k})) \neq w_2(\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'})$.

Обратим внимание, что как показал автор используя комплексную структуру на многообразиях $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$, все целочисленные классы Понтрягина этих многообразий равны нулю.