n-жёсткие функции и функциональное уравнение Хирцебруха

В. М. БУХШТАБЕР

В основе доклада лежит совместная работа с И. В. Нетаем.

Рассмотрим функцию $f(x)$ комплексного переменного x, регулярную в окрестности точки $x=0$, для которой $f(x)=x+O(x^2)$. Положим

$$F(x)=F(x;x_0,\dots,x_n)=\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{f(x-x_i)}. \tag{1}$$

Выберем окрестность U точки $x=0$, чтобы функция $f(x)$ в этой окрестности не имела нулей, кроме $x=0$. Функция $f(x)$ называется *n-жёсткой*, если сумма вычетов функции $F(x)$ в U не зависит от выбора набора не совпадающих точек $x_0,\dots,x_n\in U$.

Ясно, что функция $f(x)$ является n-жёсткой тогда и только тогда, когда ряд $x+\sum\limits_{k\geqslant 1}f_kx^{k+1}$, задающий функцию $f(x)$ в окрестности $x=0$, удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sum_{j=0}^{n}\prod_{i\neq j}^{n}\frac{1}{f(x_j-x_i)}=C=\mathrm{const}\,. \tag{2}$$

Уравнение (2) мы называем n-уравнением Хирцебруха, который нашёл фундаментальные приложения решениям этого уравнение в алгебраической топологии. Например, приложение двупараметрического рода Тодда опираются на то, что функция

$$f(x)=\frac{e^{ax}-e^{bx}}{ae^{bx}-be^{ax}} \tag{3}$$

является n-жёсткой для всех n и всех значений параметров a и b. Отметим, что, как было показано недавно, функция $f(x)$ является n-жёсткой для всех n тогда и только тогда, когда она имеет вид (3).

Используя классическую теорию эллиптических функций, нетрудно показать, что эллиптические функции уровня d являются n-жёсткими, если d делит $n+1$.

В недавней работе с Е. Ю. Буньковой классифицированы все 2-жёсткие функции. В работе с И. В. Нетаем классифицированы все 3-жёсткие функции. Доказательство этих результатов оказалось нетривиальным и существенно использует аппарат теории многочленов Шура.