Секция «Геометрия и топология»

Ассимптотические представления группы Баумслага-Солитара

Антон Игоревич Корчагин

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия

E-mail: $a_{ik}orchagin@mail.ru$

На ранних этапах развития алгебры, группы воспринимались исключительно как множество отображений, в противовес нынешнему абстрактному подходу. Но как бы не укреплялся формальный подход, интерес к теории представлений групп не угаснет никогда. Теория точных линейных представлений счетных дискретных групп развивалась с давних времен, причем существенный вклад в эту теорию принадлежит нашему математику Мальцеву, который доказал в этой области много красивых и общих теорем. Наглядным и очень поучительным, мне кажется, пример точного линейного представления свободной группы от двух образующих, реализующейся двумя достаточно простыми матрицами:

$$\mathbb{F}_2 =< \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} >$$

Долгое время оставался открытым вопрос о существовании дискретных групп, не допускающих точного линейного представления. Одним из первых появился знаменитый пример группы Баумслага-Солитара

$$B =< a, b | a^{-1} b^2 a = b^3 >$$

у которой любой гомоморфизм в линейную группу $GL_n(\mathbb{C})$ отправляет коммутатор $[a^{-1}ba, b]$ в тождественную матрицу, что означает невозможность точного линейного представления группы Баумслага-Солитара. Время шло и на математических горизонтах возник новый класс групп, известный как гиперлиненые, то есть допускающих точное не представление, а почти представление. Определение почти представления таково таково: это последовательность π_n отображений в GL_n, что аксиомы гомоморфизма выполняются ассимптотически: $\|\pi_n(g)\pi_n(h) - \pi_n(gh\|$ стремится к нулю и то же для обратного и единицы. Точность в данном случае понимается как отличие от нуля предела $\|\pi_n(g) - 1\|$ для любого неединичного элемента группы g. Компактее это можно выразить формулой:

$$G \subset \Pi GL_n / \oplus GL_n$$

Дальше всплывает вопрос выбора норм на матрицах и оказывает, что естественнее рассматривать норму Гильберта-Шмидта $\|a\|^2 = \tau(a^*a)$, где τ - нормализованный матричный след; так как именно в этом случае определение гиперлинейности связано с понятиями других математических областей, связанных с группами. Самый яркий пример - это эквивалентность гиперлинейности группы и выполнения гипотезы Конна для соответствующей групповой алгебры фон Неймана, что означает вложимость алгебры в ультрапродукт гиперфинитных факторов. Такие вещи считаются ключевыми в теории алгебр фон Неймана. Интересно, что к настоящему времени не известно ни одного примера дискретной группы, не являющейся гиперлинейной. Однако, кажется вполне естественным рассмотреть родственное гиперилинейности понятие, отличающейся от него лишь заменой в определении нормы Гильберта-Шмидта на более естественную (с точки зрения обывателя, не знакомого с гипотезой Конна) операторную норму. Этим понятием занимаются такие математики, как Войкулеску, Анде Том, школа А.С. Мищенко на нашем факультете, однако до изобилия примеров в настоящее время пока еще далеко. На докладе предполагается обсудить понятие гиперлинейности с операторной нормой для группы Баумслага-Солитара, гиперлинейной в классическом смысле нормы Гильберта-Шмидта.

Источники и литература

1) Capralo, Lupini, Introduction to sofic and hyperlinear groups and Connes embedding conjecture
2) Baumslag, Solitar, Some two-gnerator one-relator non-hopfian groups
3) Мальцев, Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами

Слова благодарности

Я благодарен Владимиру Марковичу и Насте за поддержку.