

Секция «Математика и механика»

Ряд Пуанкаре фильтрации, определённой диаграммой Ньютона.

Соломадин Григорий Дмитриевич

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: blastbeatscythe@gmail.com

Мультииндексная фильтрация на кольце $\mathcal{O}_{(V,0)} = \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}/(f)$ функций на гиперповерхности $\{f = 0\}$ использовалась в [6]. Основная идея заключалась в сопоставлении диаграмме Ньютона f фильтрации, в которой ряд Пуанкаре (см. [1]) мог бы быть посчитан, а ответ сопоставлен с соответствующей дзета-функцией монодромии. Мотивацией для этого являлись совпадение ряда Пуанкаре и дзета-функции монодромии в некоторых случаях ([2]), а также некие соотношения между ними в других (например, [3]). Одной из естественных фильтраций на кольце $\mathcal{O}_{(V,0)}$, соответствующей диаграмме Ньютона $\Gamma = \Gamma_f$, является дивизориальная фильтрация [7]. Она определяется дивизорами торического разрешения особенности f , соответствующими граням Γ . В первых работах, однако, она считалась неудобной для вычислений, в отличие от некой другой [4]. Последняя определяется по диаграмме Ньютона f , и поэтому называется ассоциированной с диаграммой Ньютона. Впоследствии ситуация с двумя названными фильтрациями изменилась до противоположной. Фильтрация, признанная "упрощенной", оказалась трудной для вычислений; более того, похоже, что утверждение Теоремы 1 статьи [4] является неверным при $s > 2$. Наконец, иная фильтрация была рассмотрена в [5].

В настоящее время известно несколько эквивалентных явных формул для ряда Пуанкаре в дивизориальной фильтрации ([6], [7]). Одна из них сформулирована в терминах суммирования по диаграммам Λ положительного ортанта целочисленной решётки $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, конгруэнтным Γ относительно переносов на любой целочисленный вектор \mathbb{Z}^2 :

$$P_{v_i}(\underline{t}) = \sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} \left(\sum_{\Lambda} \chi(\mathbb{P}\mathcal{O}_{\underline{u}(\Lambda)}^{\Lambda}) \right) \underline{t}^{\underline{v}}.$$

На основании этой формулы проф. Гусейн-Заде (Gusein-Zade) и проф. Эбелинг (Ebeling) предположили, что имеет место аналогичная формула для ряда Пуанкаре в фильтрации, ассоциированной с многогранником Ньютона f ; см. [6]. А именно, она получается из указанной выше заменой суммирования на суммирование по тем и только тем диаграммам Λ , которые конгруэнтны Γ относительно переносов, удовлетворяющих некоторому требованию неотрицательности в $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$. В частности, это означает, что ряд Пуанкаре в фильтрации, ассоциированной с многогранником Ньютона, не зависит от носителя f . Это и представляет утверждение одноименной гипотезы.

В предлагаемом докладе мы находим контрпример к описанной выше гипотезе, тем самым её опровергая. Он состоит из предъявления не равных друг другу коэффициентов рядов Пуанкаре для двух функций f_1 и f_2 , имеющих одну и ту же диаграмму Ньютона, но различные носители, в случае $s = 3$. Более того, приводится пример ещё одной функции f_3 , невырожденной по отношению к её диаграмме Ньютона, для которой один из коэффициентов ряда Пуанкаре отличен от продиктованного гипотезой.

Литература

1. Гусейн-Заде С. М. Интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике и его приложения // УМН, 65:3(393) (2010), 5–42
2. Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S. M. The Alexander polynomial of a plane curve singularity and integrals with respect to the Euler characteristic // International Journal of Mathematics 14, no.1, 47–54 (2003).
3. Ebeling W., Gusein-Zade S. M. Poincaré series and zeta function of the monodromy of a quasihomogeneous singularity // Math. Res. Lett. 9, 509– 513 (2002).
4. Ebeling W. , Gusein-Zade S. M. Multi-variable Poincaré series associated with Newton diagrams // Journal of Singularities 1, 60–68 (2010).
5. Lemahieu A. Poincaré series of embedded filtrations // arXiv:0906.4184. (2011)
6. Gusein-Zade S. M. On a Newton filtration for functions on a curve singularity. // arXiv:1206.0135 [math.AG] (2012)
7. Gusein-Zade S. M. On divisorial filtrations associated with Newton diagrams. // arXiv:1008.4659 [math.AG] (2010)

Слова благодарности

Автор выражает признательность С.М. Гусейн-Заде за подробные обсуждения задачи.