## Секция «Математика и механика»

### Псевдометрики на модулярных группах поверхностей с проколами

***Шастин Владимир Алексеевич***
*Аспирант*
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Черноголовка, Россия*
*E-mail: shast.fds@mail.ru*

Пусть $\overline{S} = \overline{S}_{g,n}$ — замкнутая ориентированная поверхность рода $g$ с $n$ отмеченными точками $P_1, \ldots, P_n$, $n \geqslant 1$. Такой поверхности можно поставить в соответсвие поверхность $S = S_{g,n}$, которая получается из $\overline{S}$ удалением отмеченных точек. В этом докладе нас будут интересовать только поверхности отрицательной эйлеровой характеристики. А именно мы требуем, чтобы величина $\chi(S) = 2 - 2g - n$ была меньше нуля.

Хорошо известно, что на поверхностях $S$ такого типа можно ввести **гиперболическую структуру** — полную риманову метрику $\sigma$ постоянной отрицательной кривизны -1 и конечной площади (см. [1]).

Гиперболические струкутры $\sigma_1$ и $\sigma_2$ на поверхности $S$ называются **эквивалентными**, если сущестует изометрия $\varphi\colon (S, \sigma_1) \to (S, \sigma_2)$, изотопная тождественному отображению $S$.

**Пространством Тайхмюллера** $\mathcal{T}(S)$ поверхности $S$ называется множество классов эквивалентности гиперболических структур на $S$.

На пространстве $\mathcal{T}(S)$ можно естественным образом ввести несколько различных метрик: метрику Тайхмюллера, метрику Вейля-Петерсона, ассиметричную метрику Тёрстона(во вступительной статье к [2] кратко описаны эти и другие метрики на пространстве Тайхмюллера). Все эти метрики задают одну и ту же топологи на $\mathcal{T}(S)$, относительно которой она является шаром размерности $6g - 6 + 2n$. В этой работе мы будем рассматривать только метрику Тёрстона(см. [3]) на $\mathcal{T}(S)$.

**Группой классов отображений** или **модулярной группой** $\mathrm{MCG}(S)$ поверхности $S$ называется группа изотопических классов сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов поверхности $S$:

$$\mathrm{MCG}(S) = Diff^{+}(S)/Diff_0(S).$$

Здесь $Diff^{+}(S)$ обозначает группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $S$, а $Diff_0(S)$ — ее нормальную подгруппу, состоящую из диффеоморфизмов изотопных тождественному. Группа $Diff^{+}(S)$ стандартным образом действует на множестве гиперболических структур на поверхности $S$(с помощью обратного образа). Это (правое) действие индуцирует действие группы $\mathrm{MCG}(S)$ на $\mathcal{T}(S)$. По отношению к ассимметрической метрике Тёрстона(как и по отношению ко всем вышеуказанным метрикам) $d_L$ это действие является изометрическим.

Если теперь зафиксировать какую-нибудь точку $\sigma \in \mathcal{T}(S)$, то можно определить отображение $i_\sigma\colon \mathrm{MCG}(S) \to \mathcal{T}(S)$, при котором диффеоморфизму $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ соответствует образ метрики $\sigma$ при обратном образе отображения $\varphi^{-1}$. Это отображение индуцирует асимметрическую псевдометрику $\rho_L$ на группе классов отображения $S$:

$$\rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) = d_L((\varphi^{-1})^*(\sigma), (\psi^{-1})^*(\sigma)),$$

для всех $\varphi, \psi \in \mathrm{MCG}(S)$.

Используя эту псевдометрику мы можем естественным образом определить функцию сложности $\| \ \|_{L,\sigma}$ на $\mathrm{MCG}(S)$:

$$\|\varphi\|_{L,\sigma} = \rho_{L,\sigma}(\varphi, 1),$$

где $\varphi$ — произвольный элемент $\mathrm{MCG}(S)$, а $1$ — класс тождественного диффеоморфизма в $\mathrm{MCG}(S)$.

Другие инвариантные псевдометрики $\mathrm{MCG}(S)$ могут быть определены в терминах систем непересекающихся простых замкнутых кривых(мультикривых) и систем непересекающихся простых дуг с концами в проколах на поверхности $S$. Псевдометрика $\rho_{\mathcal{L}}$ такого типа (и соответствующая функция сложности $\tilde{c}$) на группах классов отображений сфер с проколами была построена Иваном Дынниковым и Бертом Вистом в их совместной работе [4]. Сложность диффеоморфизма $\varphi$ в этой работе определялась как сложность образа под действием $\phi$ некоторого набора мультикривых. Сложность мультикривой в свою очередь определялась как логарифм от количества пересечений этой мультикривой с некоторой фиксированной системой дуг на сфере. В работе [4] было показано, что так определяемая псевдометрика (и соответствующая функция сложности) на группах классов отображения сфер с проколами тесно связана с псевдометрикой Терстона. А именно была доказана следующая теорема:

**Теорема 1.**(Дынников, Вист) Пусть $\sigma$ — гиперболическая метрика на сфере с $n$ проколами $S_{0,n}$ ($n \geqslant 3$), $\rho_{L,\sigma}$ — псевдометрика Тёрстона на $\mathrm{MCG}(S_{0,n})$ и $\rho_{\mathcal{L}}$ псевдометрика Дынникова, Виста. Тогда существует неотрицательная константа $C$, такая что псевдометрики $\rho_{L,\sigma}$ и $\rho_{\mathcal{L}}$ $(1, C)$-квазии-зометричны:

$$\rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) - C \leqslant \rho_{\mathcal{L}}(\varphi, \psi) \leqslant \rho_{L,\sigma}(\varphi, \psi) + C,$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathrm{MCG}(S_{0,n})$

Также отметим одно из следствий этого результата, описанное в работе [4] Для этого напомним, что толстой частью $T_{thick}(S)$ пространства Тайхмюллера поверхности $S$ называется подмножество в $\mathcal{T}(S)$, состоящее из гиперболических структур, радиус инъективности которых больше константы Маргулиса(определение константы Маргулиса можно найти в параграфе D книги [5]). В работе [4] Дынников и Вист получили следуюшее следствие из представленной выше теоремы:

**Следствие 1.**(Дынников, Вист) Пусть $\sigma$ гиперболическая структура, лежащая в толстой части $\mathcal{T}_{thick}(S_{0,n})$ пространства Тайхмюллера сферы с $n$ проколами, $\rho_{\mathcal{L}}$ — псевдометрика Дынникова и Виста на $\mathrm{MCG}(S_{0,n})$ и $d_L$ — метрика Терстона на $\mathcal{T}(S_{0,n})$. Тогда найдется неотрицательная константа $c$, такая что отображение $i_\sigma\colon (\mathrm{MCG}(S_{0,n}), \rho_{\mathcal{L}}) \to (\mathcal{T}_{thick}(S_{0,n}), d_L)$, которое элементу $\varphi \in \mathrm{MCG}(S_{0,n})$ ставит в соответствие обратный образ метрики $\sigma$ при отображении $\varphi^{-1}$ является (1,c)-квази-изометрией.

В этом докладе мы определим псевдометрику $\rho_T$ и соответсвующую функцию сложности $\| \ \|_T$ на $\mathrm{MCG}(S)$ , используя максимальные системы непересекающихся простых дуг на $S$ — идеальные триангуляции. А именно, наша сложность $\|\varphi\|_T$ элемента $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ зависит от числа пересечений $T$ и $\varphi(T)$. Сравнивая нашу псевдометрику с псевдометрикой Тёрстона мы получаем аналог указанной выше теоремы Дынникова и Виста для случая произвольной ориентирумой поверхности $S$ с непустым числом проколов:

**Теорема 2.** Пусть $\sigma$ — гиперболическая метрика на поверхности $S$ с непустым числом проколов, $\rho_{L,\sigma}$ — псевдометрика Тёрстона на $\mathrm{MCG}(S)$ и $\rho_T$ псевдометрика определяемая идеальной триангуляцией $T$. Тогда существует неотрицательная константа $D$, такая что псевдометрики $\rho_{L,\sigma}$ и $\rho_T$ $(1, D)$-квазиизометричны:

$$\rho_{L,\sigma}(\varphi,\psi) - D \leqslant \rho_T(\varphi,\psi) \leqslant \rho_{L,\sigma}(\varphi,\psi) + D,$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathrm{MCG}(S)$

Мы также получаем следствие из нашей теоремы, аналогичное указанному выше следствию из теоремы Дынникова, Виста:

**Следствие 2.** Пусть $\sigma$ гиперболическая структура, лежащая в толстой части $\mathcal{T}_{thick}(S)$ пространства Тайхмюллера поверхности $S$ с непустым числом проколов, $\rho_T$ — псевдометрика на $\mathrm{MCG}(S)$, определяемая по идеальной триангуляции $T$ и $d_L$ — метрика Терстона на $\mathcal{T}(S)$. Тогда найдется неотрицательная константа $d$, такая что отображение $i_\sigma \colon (\mathrm{MCG}(S), \rho_T) \to (\mathcal{T}_{thick}(S), d_L)$, которое элементу $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$ ставит в соответствие обратный образ метрики $\sigma$ при отображении $\varphi^{-1}$ является (1,d)-квази-изометрией.

## Литература


1. Athanase Papadopoulos(ed.), Handbook of Teichmüller spaces, Volume I, European Mathematical Society Publishing House, 790 pages, Zurich, 2007

2. M. Kapovich, Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups: Lectures on Thurston's Hyperbolization, Birkhauser's series "Progress in Mathematics", 2000

3. W. P. Thurston, Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces. Preprint 1986.

4. I. Dynnikov, B. Wiest, On the complexity of braids, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 9:4 (2007), 801–840

5. Riccardo Benedetti, Carlo Petronio, Lectures on Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.


## Слова благодарности

Автор выражает благодарность И.А. Дынникову за постановку задачи и постоянное внимание к рабте.