Секция «Математика и механика»

Об особенностях заданного типа на кривых и поверхностях фиксированной квазистепени и мультистепени

Асташов Евгений Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ast-ea@yandex.ru

Существует общая задача описания алгебраических многообразий с особенностями заданного типа и о связи степени многообразий с параметрами этих особенностей (см., например, [2]).

Определение 1 *Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, a) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, $k \in \mathbb{N}$. Говорят, что росток гиперповерхности $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ в точке a имеет особенность типа $\mathcal{A}_k$, если в окрестности этой точки в $\mathbb{C}^n$ существуют локальные координаты $z_1, \ldots, z_n$, центрированные в точке a, в которых функция f имеет вид $f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^{k+1} + z_2^2 + \ldots + z_n^2$.*

В работах [1] и [3] изучаются особенности типа $\mathcal{A}_k$, которые встреаются на гиперповерхностях фиксированной степени d в $\mathbb{C}^n$.

В настоящей работе изучается вопрос о том, какие особенности типа $\mathcal{A}_k$ могут иметь алгебраические кривые (соответственно, поверхности) фиксированной степени, квазистепени или мультистепени в $\mathbb{C}^2$ (соответственно, в $\mathbb{C}^3$). Результаты настоящей работы частично является обобщением результатов работы [3]. Точные определения и формулировки результатов приведены ниже.

Определение 2 *Пусть $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ — набор натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Будем говорить, что моном $\underline{x}^{\underline{k}} = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ имеет $\underline{\alpha}$-квазистепень d, если выполнено равенство $\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = d$. При этом $\underline{\alpha}$-квазистепень нулевого монома по определению полагается равной $+\infty$. Квазистепень многочлена определяется как наибольшая из квазистепеней его (ненулевых) мономов.*

Обозначим через $k_n(\underline{\alpha}; d)$ наибольшее из таких $k \in \mathbb{N}$, для которых существует гиперповерхность, заданная многочленом $\underline{\alpha}$-квазистепени d в $\mathbb{C}^n$ с особенностью типа $\mathcal{A}_k$ в какой-либо точке.

Теорема 1 *Для любых взаимно простых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\underline{\lim}_{d\to\infty} \frac{k_2((\alpha,\beta); d)}{d^2} \geq \frac{112}{209} \cdot \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Для любых взаимно простых в совокупности $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство:

$$\underline{\lim}_{d\to\infty} \frac{k_3((\alpha,\beta,\gamma); d)}{d^3} \geq \frac{56}{209} \cdot \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Определение 3 *Мультистепенью многочлена $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется набор чисел $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, где d_i — наибольшая степень, в которой переменная x_i входит в мономы этого многочлена.*

Обозначим через $K_n(d_1, \ldots, d_n)$ наибольшее из таких $k \in \mathbb{N}$, для которых существует гиперповерхность мультистепени $(d_1, \ldots, d_n)$ в $\mathbb{C}^n$ с особенностью типа $\mathcal{A}_k$ в какой-либо точке.

Теорема 2 *Имеют место неравенства*

$$\underline{\lim}_{d_1, d_2 \to \infty} \frac{K_2(d_1, d_2)}{d_1 d_2} \geq \frac{7}{11}, \qquad \underline{\lim}_{d_1, d_2, d_3 \to \infty} \frac{K_3(d_1, d_2, d_3)}{d_1 d_2 d_3} \geq \frac{7}{22}.$$

Литература

1. С. М. Гусейн-Заде, Н. Н. Нехорошев. Об особенностях типа A_k на плоских кривых фиксированной степени. Функциональный анализ и его прил., т. 34, вып. 3 (2000), 69-70.

2. G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin. Plane curves of minimal degree with prescribed singularities. Invent. Math. v.133, no. 3, 539-580 (1998).

3. E. Astashov. On algebraic hypersurfaces of fixed degree in $\mathbb{C}^n$ with prescribed singularities. International miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications" (16 June 2012). Proceedings. M.: MESI, 2013. 5-19.

Слова благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-13-01-00755.