О фундаментальной группе и когомологиях 2-значных топологических групп и $2H$-пространств

В 1990 году В. М. Бухштабером была открыта важная структура 2-значной алгебраической группы на $\mathbb{C}P^1$. Это положило начало топологической теории n-значных групп, которая была развита в работах В. М. Бухштабера и Э. Г. Риса, а также в работах А. М. Вершика, А. П. Веселова, А. А. Гайфуллина, В. Драговича, Т. Е. Панова и П. В. Ягодовского.

Под n-значным умножением на хаусдорфовом пространстве X понимается непрерывное отображение $\mu : X \times X \to \mathrm{Sym}^n X = X^n/S_n$. Скажем, что n-значное умножение μ удовлетворяет аксиоме единицы, если существует точка $e \in X$, для которой $\mu(e, x) = \mu(x, e) = [nx]$ $\forall x \in X$. В этом случае пару (X, μ) будем называть nH-пространством. $1H$-пространства — это обычные H-пространства. Если к аксиоме единицы для nH-пространства добавить определенные аксиомы ассоциативности и обратного элемента, то получим определение n-значной топологической группы.

Как хорошо известно, фундаментальная группа любого связного H-пространства абелева. Более того, для любой абелевой группы A существует H-пространство (даже пространство петель) $K(A, 1) = \Omega K(A, 2)$ с фундаментальной группой A. Таким образом, вопрос о том, какие группы могут быть фундаментальными группами H-пространств, имеет простой ответ: все абелевы группы и только они.

В докладе будет рассказано о полученных частичных ответах на следующий по сложности вопрос: какие фундаментальные группы могут быть у $2H$-пространств. Приведем основные результаты в этом направлении.

Предложение 1. *Любой ацикличный компактный CW комплекс X допускает структуру nH-пространства для всех $n \geq 2$.*

Теорема 1. *Существует (будет дано явное определение) класс $\mathcal{C}$ конечно определенных групп, для которого выполнено следующее:*
(1) $\pi_1(\Gamma_g) \in \mathcal{C}, g \geq 2$, где Γ_g — компактная риманова поверхность рода g.
(2) Если $G \in \mathcal{C}$ и K — конечно определенная группа, то $G \times K \in \mathcal{C}$ и $G * K \in \mathcal{C}$.
(3) Пусть X — связное хаусдорфово, гомотопически эквивалентное CW комплексу пространство, с условием $\dim H^q(X; \mathbb{Q}) < \infty$ $\forall q \geq 0$. Если X допускает структуру $2H$-пространства, то $\pi_1(X) \notin \mathcal{C}$.

Теорема 1 позволяет строить многочисленные примеры неодносвязных пространств (многообразий), не допускающих 2-значного умножения с единицей.

Основным средством доказательства теоремы 1 является теория градуированных n-гомоморфизмов Фробениуса. Теория неградуированных n-гомоморфизмов Фробениуса была построена в работах В. М. Бухштабера и Э. Г. Риса начиная с 1996 года. Градуированная версия этой теории была построена автором в 2010-11 гг.

Алгебра рациональных когомологий $H^*(X;\mathbb{Q})$ любого связного H-пространства является предхопфовой алгеброй, т.е. для нее существует гомоморфизм алгебр $\Delta : H^*(X;\mathbb{Q}) \to H^*(X;\mathbb{Q}) \otimes H^*(X;\mathbb{Q})$, удовлетворяющий аксиоме коединицы. Известная теорема Хопфа-Лере утверждает, что как алгебра $H^*(X;\mathbb{Q})$ является свободной градуированной алгеброй, т.е. изоморфна внешней алгебре от нечетномерных образующих тензорно умноженной на алгебру полиномов от четномерных образующих.

Как было показано автором в 2011 году, алгебра $H^*(X;\mathbb{Q})$ любого связного nH-пространства допускает n-гомоморфизм $\Delta : H^*(X;\mathbb{Q}) \to H^*(X;\mathbb{Q}) \otimes H^*(X;\mathbb{Q})$ такой, что отображение $\frac{\Delta}{n}$ удовлетворяет аксиоме коединицы. Недавно было получено следующее уточнение: n-гомоморфизм Δ переводит целочисленные рациональные классы $\alpha \in H^*(X;\mathbb{Q})$ в целочисленные элементы тензорного квадрата $H^*(X;\mathbb{Q}) \otimes H^*(X;\mathbb{Q})$.

С помощью этого условия целочисленности был получен следующий основной результат доклада:

Теорема 2. *Комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^m, m \geq 2$, не допускают 2-значного умножения с единицей.*

Замечание. Для комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ эта теорема была доказана В. М. Бухштабером и Э. Г. Рисом в 1997 году.