Секция «Геометрия и топология»

Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: полная топологическая классификация

Кобцев Иван Федорович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: int396.kobtsev@mail.ru

Рассматривается задача о движении материальной точки единичной массы в области, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1$, в силовом поле с потенциалом $V=\dfrac{k}{2}\bigl(x^2+y^2\bigr)+\dfrac{\alpha}{2x^2}+\dfrac{\beta}{2y^2}$. Эта механическая система является интегрируемой с интегралами

$H=\dfrac{1}{2}\bigl(\dot{x}^2+\dot{y}^2\bigr)+\dfrac{k}{2}\bigl(x^2+y^2\bigr)+\dfrac{\alpha}{2x^2}+\dfrac{\beta}{2y^2}$

(полная энергия),

$F=\dfrac{\dot{x}^2}{a}+\dfrac{\dot{y}^2}{b}+\dfrac{(\dot{x}y-\dot{y}x)^2}{ab}+\Bigl(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\Bigr)\Bigl(-k+\dfrac{\alpha}{ax^2}+\dfrac{\beta}{by^2}\Bigr)$

(дополнительный интеграл).

Эти интегралы указаны В.В. Козловым в [1].

Интересные результаты получаются, если рассматривать эту механическую систему как гамильтонову. Полная интегрируемость системы приводит к новым топологическим аспектам задачи. В частности, корректно определено понятие слоения Лиувилля и лиувиллевой эквивалентности [2]. В данной задаче существует процедура, позволяющая значительно упростить топологический анализ.

Именно, уравнения движения системы можно привести к виду

$$\dot{\lambda}_i=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{P(\lambda_i)},\quad i=1,2,$$

где $(\lambda_1,\,\lambda_2)$ — эллиптические координаты на плоскости, $-a\leqslant\lambda_2\leqslant -b$, $-b\leqslant\lambda_1\leqslant 0$, $P(\lambda_i)$ — многочлен с коэффициентами, зависящими от параметров a, b, k, α, β и от h, f — значений интегралов H и F соответственно.

Для задач, допускающих такое разделение переменных, в [3] приведен алгоритм, позволяющий установить типы интегральных поверхностей и их перестройки. Также описанным способом можно вычислять инварианты лиувиллевой эквивалентности (инварианты Фоменко–Цишанга) [2].

В ходе исследования рассмотрены все возможные варианты параметров задачи, перечислены области возможного движения точки, найдены бифуркационные диаграммы, построены изоэнергетические инварианты лиувиллевой эквивалентности. Также обнаружено сходство построенных инвариантов с полученными ранее при анализе других задач классической механики.

Источники и литература

1) Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1, 1995.

2) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. 1,2. Ижевск:РХД, 1999.

3) Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, Т.6, №4, с.769–805.