

**Теорема Милнора о гомотопической эквивалентности в категориях
профильтрованных и стратифицированных пространств**

Научный руководитель – Агеев Сергей Михайлович

Жигулич Ирина Александровна

Аспирант

Белорусский государственный университет, Механико-математический факультет,
Минск, Беларусь

E-mail: irina.zhigulich@gmail.com

Целью работы является модификация известной теоремы Милнора о гомотопической эквивалентности профильтрованных отображений CW-комплексов (см. [2,3]) в *категории метрических профильтрованных пространств* (т. н. \mathcal{N} -пространств [1]). В этой категории, морфизмами которой являются сохраняющие фильтрацию отображения \mathcal{N} -пространств (т. н. \mathcal{N} -отображения), строится теория ретрактов и экстензоров. Оказывается, что метрическое пространство X является \mathcal{N} -AR-пространством в том и только том случае, когда все элементы фильтрации являются AR-пространствами. Более того, нами установлена следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть \mathcal{N} -отображение \mathcal{N} -ANE-пространств. Тогда отображение f есть \mathcal{N} -гомотопическая эквивалентность в том и только том случае, когда для любого натурального числа n отображение $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ есть гомотопическая эквивалентность.*

Топология CW-комплексов является слабой относительно фильтрации, в результате чего в доказательстве теоремы Милнора существенно используются индуктивные рассуждения. В случае же метрических профильтрованных пространств топология отличается от слабой и поэтому доказательство теоремы 1 требует новой техники. Мы редуцируем исследование \mathcal{N} -гомотопических эквивалентностей к теории ретрактов и экстензоров *категории стратифицированных пространств*. Объектами данной категории являются \mathcal{N} -пространства, а морфизмами являются отображения, сохраняющие страты фильтрации (т. н. \mathcal{S} -отображения [3]). С помощью специального функтора из категории \mathcal{N} -пространств в категорию \mathcal{S} -пространств доказательство теоремы 1 сводится к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть \mathcal{S} -отображение \mathcal{S} -ANE-пространств. Тогда отображение f есть \mathcal{S} -гомотопическая эквивалентность (а следовательно, и \mathcal{N} -гомотопическая эквивалентность) в том и только том случае, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение $f^n \rightleftharpoons f|_{X^n}: X^n \rightarrow Y^n$ есть гомотопическая эквивалентность.*

Источники и литература

- 1) Агеев С. М., Жигулич И. А., Силаева З. Н. Инъективные объекты категории стратифицированных пространств // Изв. вузов. Матем. 2017. №2. С. 3–13.
- 2) Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Наука, 1995.
- 3) Постников М. М. Лекции по алгебраической гомотопии. Основы теории гомотопий. М.: Наука, 1984.