Секция «Геометрия и топология»

Интегрируемые биллиарды в книжке

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Харчева Ирина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: irina_harcheva@mail.ru

Определение 1. *Биллиардной книжкой* назовем несвязное объединение n биллиардных областей, каждая из которых ограничена дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства, отождествленное вдоль некоторых выпуклых сегментов границ.

Движение в биллиардной книжке определяется следующим образом – точка движется внутри листа биллиардной книжки, абсолютно-упруго отражаясь от границы, а при попадании на ребро склейки ("корешок книжки") переходит с одного листа на другой, отражаясь от этого ребра склейки. Вследствие теоремы Якоби-Шаля биллиард в каждой биллиардной области вполне интегрируем, что влечет за собой вполне интегрируемость движения в биллиардной книжке: каждое звено траектории-ломаной лежит на прямой, являющейся касательной к некоторой фиксированной квадрике, софокусной сегментам границы.

Таким образом, у динамической системы на многообразии M^4 есть 2 интеграла: вектор скорости f и параметр квадрики g, которой касается траектория. Рассмотрим $Q^3 = \{x \in M^4 : f(x) = 1\}$ и его слоение Лиувилля со слоями $\{x \in Q^3 : g(x) = \lambda\}$. Можем показать, что каждая связная компонента неособого слоя есть тор. А особые слои описывают перестройку этих торов. Инвариантная окрестность особого слоя $\{x \in Q^3 : g(x) \in \{\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon\}\}$ называется атомом. Если отождествить связные компоненты слоя, получим граф, вершины которого являются атомами. Ребра графа снабдим метками, которые будут показывать, как склеены торы. Граф с метками на ребрах называется меченой молекулой Фоменко-Цишанга, без меток - грубой молекулой Фоменко. Из теоремы Фоменко-Цишанга следует, что меченая молекула является полным инвариантом слоения Лиувилля многообразия Q^3. Это позволяет сравнивать слоения Лиувилля разных динамических систем (подробнее см. [n1]).

Теорема 1. *Для биллиардных книжек, отвечающих склейке из таблицы на рисунке 2 слева, указанные меченные молекулы являются инвариантами Фоменко-Цишанга* [n1] *и описывают топологию слоения Лиувилля* Q^3.

Утверждение 1. *Для биллиардных книжек, отвечающих склейке из таблицы на рисунке 2 справа, указанные молекулы являются грубыми инвариантами Фоменко* [n1] *и описывают перестройку торов Лиувилля в* Q^3.

Источники и литература

1) А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск; НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999. Т.1.

2) Фокичева В. В. Топологическая классификация биллиардов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Математический сборник. 2015. Т. 206, № 10. С. 127–176.

Иллюстрации

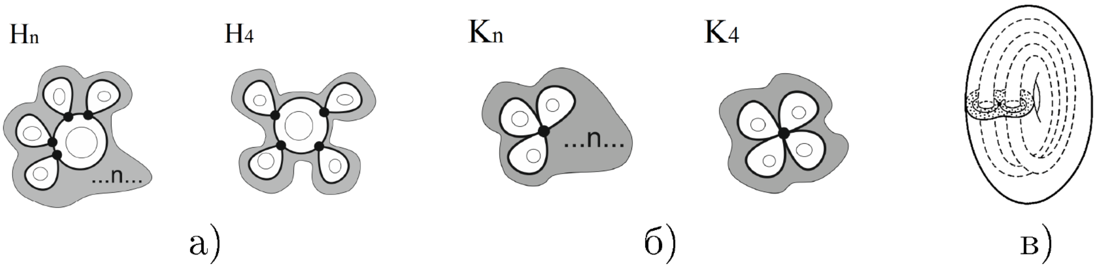


Рис. 1. На рисунке а) изображены двумерные атомы серии H_n и частный случай – атом H_4. На рисунке б) изображены двумерные неморсовские атомы серии K_n, а также его частный случай при $n = 4$. 3-атомы получаются умножением соответствующего 2-атома на окружность. Атом, получившийся умножением 2-атома K_n на окружность и последующей факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}_n$, назовем 3-атомом $K^*_{1,n}$. Легко понять, что в случае $n = 2$ атом $K^*_{1,n}$ совпадает с атомом A^*, изображённом на рисунке в).

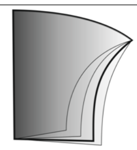
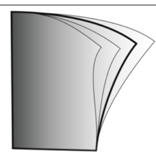
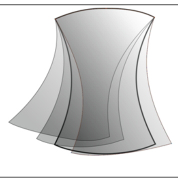
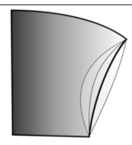
Название книжки	Книжка для n=4	Инвариант Фоменко-Цишанга	Название книжки	Книжка для n=4	Грубая молекула Фоменко
$\Delta_\alpha(nA'_0)$		A $r = 0$ $\varepsilon = 1$ A	$\Delta_\gamma(nA'_0)$		A K_n A A ...n... A
$\Delta_\beta(nA'_0)_y$		A $r = \frac{1}{n}$ $\varepsilon = 1$ A	$\Delta_\beta(nA'_0)_c$		A $K^*_{1,n}$ A
$\Delta_\alpha(nA_0)$		A $r = \infty$ $\varepsilon = 1$ H_n $r = 0$, $\varepsilon = 1$; $r = 0$, $\varepsilon = 1$; $r = 0$, $\varepsilon = 1$ A A ...n... A	$\Delta_\beta(nA'_0)_{yc}$		A $K^*_{1,n}$ A

Рис. 2. Инварианты Фоменко-Цишанга и грубые молекулы Фоменко для указанных биллиардных книжек.