Секция «Геометрия и топология»

Эллиптический биллиард на плоскости Минковского

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Каргинова Екатерина Евгеньевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теоретической механики и мехатроники,
Москва, Россия
E-mail: virus_kat_@mail.ru

Пространством Минковского называется $\mathbf{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$.

Исследованию топологии слоений Лиувилля биллиардной задачи в пространстве Минковского посвящено несколько работ В. Драгович и М. Раднович.

Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс E, задаваемый следующим соотношением

$$E\colon \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

Здесь $a > b > 0$ - вещественные числа. Софокусное семейство коник C_λ зададим уравнением

$$C_\lambda\colon \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$$

Данное семейство изображено на рисунке 1.

Рассмотрим биллиард в эллипсе E. Для пространства Минковского существует аналог теоремы Якоби-Шаля (доказательство которого можно найти в [3]), согласно которому биллиардные траектории обладают каустическим свойством: прямые, являющиеся продолжениями отрезков фиксированной траектории, касаются одной и той же софокусной коники семейства C_λ. Отсюда следует что λ - параметр коники - является первым интегралом. Кроме того, при биллиардном движении сохраняется евклидова длина вектора скорости, поэтому $v_1^2 + v_2^2$ - ещё один первый интеграл. Эти функции находятся в инволюции относительно стандартной симплектической структуры, что влечёт интегрируемость по Лиувиллю данной системы.

В. Драгович и М. Раднович применили метод Фоменко-Цишанга для описания топологии слоения Лиувилля для биллиарда в эллипсе на плоскости Минковского. Этот метод заключается в нахождении графа с метками, который является инвариантом интегрируемой системы и полностью определяет топологический тип его слоения Лиувилля. Данный подход подробно изложен в [1].

Ограничивая систему на поверхность уровня первого интеграла $v_1^2 + v_2^2$, получим трёхмерное многообразие, называемое изоэнергетической поверхностью Q^3. В зависимости от изменения λ оно расслаивается на двумерные поверхности.

Утверждение 1. ([2]) В. Драгович. М. Раднович. Топология слоения Лиувилля биллиарда в эллипсе E описывается инвариантом Фоменко-Цишанга, изображенным на рисунке 2.

Рассмотрим биллиарды на плоскости Минковского в областях, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол семейства C_λ. В этой работе были рассмотрены биллиарды в каждой из возможных областей. Поскольку первыми интегралами таких систем по-прежнему являются параметр каустики λ и евклидова длина вектора скорости $v_1^2 + v_2^2$, можно построить для каждой из них молекулу, являющуюся грубым инвариантом Фоменко.

Утверждение 2. В таблице 1 приведены молекулы, являющиеся грубыми инвариантами Фоменко для каждого типа областей, описывающие грубую топологию слоения Лиувилля.

Источники и литература

1) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999. Т. 1.
2) Драгович В., Раднович М. Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского // Фундаментальная и прикладная математика, 2015, Т. 20(2), С. 51-64
3) Khesin B., Tabachnikov S. Pseudo-Riemannian geodesics and billiards // Advances in Mathematics, 2009, Vol. 221(4), P. 1364-1396.

Иллюстрации

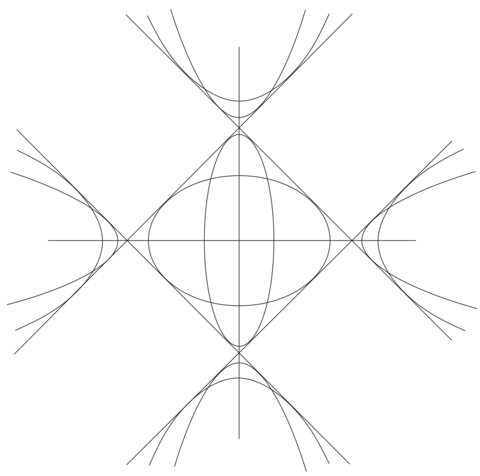


Рис. 1. Рис. 1: Семейство софокусных коник C_λ на плоскости Минковского

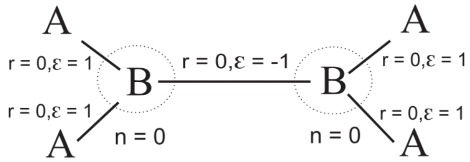


Рис. 2. Рис. 2: Инвариант Фоменко-Цишанга для эллиптического биллиарда на плоскости Минковского

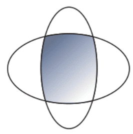
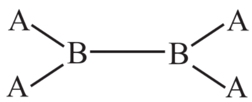
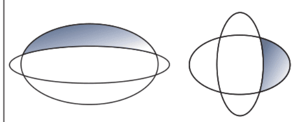
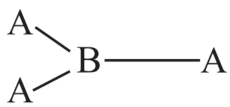
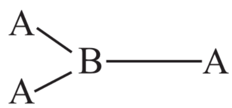
Название области	Вид области	Грубая молекула Фоменко
Ψ_1		
Ψ_2		
Ψ_3		

Рис. 3. Таблица 1: Грубые молекулы, описывающие биллиардное движение в указанных областях.