Секция «Геометрия и топология»

Погружение графов в проективную плоскость

Научный руководитель – Кудрявцева Елена Александровна

Ивашковский Максим Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: frank1581@yandex.ru

Исследуются погружения графов в проективную плоскость. Получена классификация погружений с точностью до регулярной гомотопности. Построен полный инвариант погружений с точностью до регулярной гомотопности. Полный текст работы можно прочитать в [1]. Случай погружений графов в любую компактную поверхность, отличную от проективной плоскости, был разобран Пермяковым Д.А.[2]

Пусть дан связный граф G (возможно, имеющий петли и кратные ребра) с выделенной на нем вершиной v. Рассмотрим погружение $\gamma : G \looparrowright M$ графа G в связное компактное гладкое двумерное многообразие M. Требуется получить классификацию всех возможных погружений с точностью до регулярной гомотопности.

В настоящем докладе будет изложено решение этой задачи в случае, когда $M = \mathbb{R}P^2$ — проективная плоскость, и построен полный инвариант погружений графа G в проективную плоскость в терминах индекса самопересечения кривых по модулю 2.

Будем предполагать, что граф G состоит из одной вершины и n ребер.

Теорема 1. *Пусть γ_1, γ_2 — два погружения графа G в проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$. Эти погружения регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда $Inv(\gamma_1) = Inv(\gamma_2)$. Здесь функционал $Inv : \{\gamma : G \looparrowright \mathbb{R}P^2\} \to (\Sigma_{2n-1}/\mathbb{Z}_2) \times \{0,1\}^{2n}$ определяется формулами*

$$Inv_1(\gamma) := \Big(\text{циклический порядок полуребер для } \gamma\Big) \in \Sigma_{2n-1}/\mathbb{Z}_2,$$

$$Inv_2(\gamma) := \Big([\gamma|_{e_1}], \dots, [\gamma|_{e_n}]\Big) \in \Big(\pi_1(\mathbb{R}P^2)\Big)^n \cong (\mathbb{Z}_2)^n = \{0,1\}^n,$$

$$Inv_3(\gamma) := \Big(I(\gamma|_{e_1}) \bmod 2, \dots, I(\gamma|_{e_n}) \bmod 2\Big) \in (\mathbb{Z}_2)^n = \{0,1\}^n,$$

$$Inv(\gamma) := \Big(Inv_1(\gamma), Inv_2(\gamma), Inv_3(\gamma)\Big).$$

Источники и литература

1) Ivashkovskii M. A. Graphs immersions to the projective plane // Moscow Univ. Math. Bull. 2017 (to appear), arXiv:1611.09634.

2) Пермяков Д. А. Регулярная гомотопность погружений графов в поверхности // Матем. сб. 2016. 207, N 6. 93–112.