Секция «Геометрия и топология»

Треугольные базисы в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$

Научный руководитель – Попеленский Фёдор Юрьевич

Емельянов Данила Юрьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: emelyanov.d.yu@yandex.ru

Пусть $p > 2$ простое, $\bar{\mathcal{A}}_p$ — подалгебра в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$, мультипликативно порождённая всевозможными степенями Понтрягина P^i. В $\bar{\mathcal{A}}_p$ известен ряд аддитивных базисов: это классические базис допустимых мономов и базис Милнора, семейство P_t^s-базисов и C, X и Z-базис (обобщение последних трёх на $\bar{\mathcal{A}}_p$ см. в [1]).

Представляет интерес следующий вопрос: для каких пара базисов матрица замены имеет треугольный вид.

Определение 1. Два базиса B_1 и B_2 будем называть *треугольными друг по отношению к другу*, если существуют такие линейные порядки на B_1 и B_2, что матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2 треугольна относительно этих порядков.

Явная формула для разложения произведения двух базисных элементов по тому же базису известна лишь для базиса Милнора, поэтому важно знать какие базисы треугольный по отношению к базису Милнора.

Теорема 1. *Для любого базиса B из семейства P_t^s-базисов существует линейный порядок, а также линейный порядок на элементах базиса Милнора B_{Mil}, что базисы B и B_{Mil} треугольны друг по отношению к другу. Более того для всех элементов семейства P_t^s-базисов такой порядок может быть выбран согласованно.*

Теорема 2. *X-базис треугольный по отношению к базису Милнора.*

Напомним определение Z-базиса.

Определение 2. Определим *правое* лексикографическое упорядочение на конечных последовательностях целых чисел стандартным образом: $I <_R J$, где $I = (i_1, \ldots, i_n)$ и $J = (j_1, \ldots, j_m)$, если выполнены следующие условия:

(i) последовательность I пуста, J — нет,

(ii) $I, J \neq \emptyset$ и $i_n < j_m$,

(iii) $I, J \neq \emptyset, i_n = j_m$ и $(i_1, \ldots, i_{n-1}) <_R (j_1, \ldots, j_{m-1})$.

Левое лексикографическое упорядочение $<_L$ определятся аналогично.

Пусть $Z_k^n = P^{p^k} P^{p^{k+1}} \cdots P^{p^n}$, где $n \geq k \geq 0$.

Определение 3. Будем называть *Z-мономом* произведение

$$Z^I = Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_r}^{n_r},$$

где I — последовательность пар $((n_1, k_1), \ldots, (n_r, k_r))$, удовлетворяющая следующим двум свойствам:

1) $(n_1, k_1) \geqslant_L (n_2, k_2) \geqslant_L \cdots \geqslant_L (n_r, k_r)$
2) если последовательность I содержит подпоследовательность одинаковых пар

$$(n_t, k_t) \geqslant_L (n_{t+1}, k_{t+1}) = \cdots = (n_{t+s}, k_{t+s}) \geqslant_L (n_{t+s+1}, k_{t+s+1}),$$

тогда $s < p$ для каждой такой последовательности.

Пусть $\bar{Z}_k^n = P^{p^n + p^{n-1} + \ldots + p^k}$, где $n \geq k \geq 0$.

Определение 4. Будем называть WZ-*мономом* произведение

$$\bar{Z}^I = \bar{Z}_{k_1}^{n_1} \cdots \bar{Z}_{k_r}^{n_r},$$

где I — последовательность пар $((n_1, k_1), \ldots, (n_r, k_r))$, удовлетворяющая следующим двум свойствам:

1) $(n_1, k_1) \geqslant_L (n_2, k_2) \geqslant_L \cdots \geqslant_L (n_r, k_r)$
2) если последовательность I содержит подпоследовательность одинаковых пар

$$(n_t, k_t) \geqslant_L (n_{t+1}, k_{t+1}) = \cdots = (n_{t+s}, k_{t+s}) \geqslant_L (n_{t+s+1}, k_{t+s+1}),$$

тогда $s < p$ для каждой такой последовательности.

Теорема 3. *Z-базис и WZ-базис треугольны друг по отношению к другу.*

Список литературы

[1] Emelyanov, D. Yu, and Th Yu Popelensky. "On monomial bases in the mod p Steenrod algebra."Journal of Fixed Point Theory and Applications (2014): 1-13.