Секция «Геометрия и топология»

Продолжаемость геодезических в пространстве метрических компактов с метрикой Громова-Хаусдорфа.

Научный руководитель – Иванов Александр Олегович

Борзов Станислав Игоревич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: stanislav.borzov@gmail.com

Аннотация. В данной работе изучается возможность продолжения геодезических между двумя конечными метрическими пространствами в пространстве Громова-Хаусдорфа. Показано, что геодезическая не продолжается за меньшее по мощности пространство, но может продолжаться за большее.

1. Необходимые определения

Определение 1. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \leqslant r$, где d_H — расстояние по Хаусдорфу в Z. Хорошо известно [1], что функция d_{GH} является метрикой на множестве всех классов изометриченых метрических пространств. Полученное метрическое пространство будем называть *пространством Громова–Хаусдорфа.*

Определение 2. *Соответствием* между X и Y будем называть такое отношение $R \subset X \times Y$, для которого ограничения на R канонических проекций $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\circ R(X, Y)$.

Определение 3. Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $disR$ *отношения* $R \in \circ R(X, Y)$ назовем число

$$disR = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y), (x', y') \in R\Big\}.$$

Предложение 1.

1

Для любых метрических пространств X *и* Y *имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{disR : R \in \circ R(X, Y)\big\}.$$

Определение 4. Соответствие R между X и Y назовем *оптимальным*, если

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}disR.$$

Определение 5. Пространства X и Y назовем *взаимно экстремальными*, если выполнены два условия:

$$diam(X) = diam(Y) = D$$

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}D$$

2. Результаты

Теорема 1. *Пусть X и Y – конечные метрические пространства, причем мощность X не меньше мощности Y. Пусть также пространства X и Y — взаимно экстремальные и их диаметр равен D. Тогда геодезическая между X и Y в пространстве Громова–Хаусдорфа не продолжается за Y.*

Доказательство. Введем обозначения:

$$d_X = \min\big\{|xx'| : x, x' \in X, x \neq x'\big\}$$

$$d_Y = \min\big\{|yy'| : y, y' \in Y, y \neq y'\big\}$$

$$d = \min\{d_X, d_Y\}$$

Предположим, что геодезическая между X и Y продолжается за Y на некоторое $\varepsilon < \frac{1}{2}d$ до метрического пространства Z. Из $d_{GH}(Y, Z) = \varepsilon$ следует, что $diam(Z) \leqslant diam(Y) + 2\varepsilon = D + 2\varepsilon$. В силу ограничения на ε оптимальное соответствие между Y и Z будет иметь вид $R_{YZ} = \bigsqcup\limits_{1\leqslant i\leqslant|Y|} y_i \times Z_i$, где $Z = \bigsqcup\limits_{1\leqslant i\leqslant|Y|} Z_i$ и $diam(Z_i) \leqslant 2\varepsilon$. Построим соответствие $R_{XZ} = \bigsqcup\limits_{1\leqslant i\leqslant|X|} x_i \times Z_{k_i} \subset X \times Z$, в котором кажому элементу x соответствуют элементы ровно одного Z_i. Такое соответствие существует в силу условия $|X| \geqslant |Y|$. Оценим искажение этого соответствия:

$$dis(R_{XZ}) = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz'|\big| : (x, z), (x', z') \in R_{XZ}\Big\}.$$

Рассмотрим разные случаи раскрытия модуля $||xx'| - |zz'||$:

1) $\big||xx'| - |zz'|\big| = |xx'| - |zz'| \leqslant |xx'| \leqslant D$;
2) $\big||xx'| - |zz'|\big| = |zz'| - |xx'|$

   а) $x = x'$. Тогда $|zz'| \leqslant 2\varepsilon$, следовательно $\big||xx'| - |zz'|\big| \leqslant 2\varepsilon \leqslant D$;
   б) $x \neq x'$. Тогда $|xx'| \geqslant d$, следовательно $\big||xx'| - |zz'|\big| \leqslant |zz'| - d \leqslant (D + 2\varepsilon) - d \leqslant D$.

Получили, что $dis(R_{XZ}) \leqslant D$, следовательно, $d_{GH}(X, Z) \leqslant \frac{1}{2}D < \frac{1}{2}D + \varepsilon$, то есть Y не может лежать на геодезической между X и Z. Покажем на примере, что условие $|X| \geqslant |Y|$ существенно.

Теорема 2. *Пусть $X = \Delta_n, Y = \Delta_m$ — конечные метрические пространства с единичными длинами между различными элементами мощности n и m соотвественно, а $Z_\alpha = (1 + \alpha)\Delta_m$ — m–точечное метрическое пространство с расстояниями между различными точками равными $1 + \alpha$. Пусть также $n < m$. Тогда геодезическая между X и Y продолжается до Z_ε.*

Доказательство. Известно [2], что $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}$, $d_{GH}(Y, Z_\alpha) = \frac{1}{2}\alpha$ и $d_{GH}(X, Z_\alpha) = \frac{1}{2}(1+\alpha)$. Таким образом, кривая, состоящая из пространств Z_α при $0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon$ является продолжением геодезической между X и Y.

Источники и литература

1) Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 200
2) Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. *Geometry of compact metric space in terms of gromov-hausdorff distances to regular simplexes* // ArXiv e-prints. — 2016. — no. arXiv:1607.06655.