

Секция «Математика и механика»

Кубические реализации флаговых нестоэдров и доказательство гипотезы  
Гала для них.

*Володин Вадим Дмитриевич*

*Студент*

*МГУ, Москва, Россия*

*E-mail: volodinvadim@gmail.com*

Для каждого  $n$ -мерного многогранника  $P$  можно определить  $f$ -полином как  $f(P)(t) = \sum_{i=0}^n f_i t^i$ , где  $f_i$  — число граней  $P$  размерности  $i$ , и  $h$ -полином по формуле  $h(P)(t) = f(P)(t-1)$ . Соотношения Дена-Соммервилля для простых многогранников равносильны возвратности их  $h$ -полиномов, следовательно  $h(P)(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_i t^i (1+t)^{n-2i}$ . Полином  $\gamma(P)(\tau) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_i \tau^i$  называется  $\gamma$ -полиномом.

Общая задача заключается в описании  $h$ -полиномов (эквивалентно,  $\gamma$ -полиномов) простых флаговых многогранников. В работе [4] была представлена известная гипотеза:

**Гипотеза Гала.** Пусть многогранник  $P$  простой и флаговый, тогда  $\gamma_i(P) \geq 0$ .

Нестоэдры представляют собой широкий класс простых многогранников с хорошо описываемой комбинаторикой. В работах [2],[3],[5] гипотеза Гала была установлена для нестоэдров, соответствующих хордовым производящим множествам и полным двудольным графам. В ходе исследования были получены следующие результаты:

**Теорема 1.** Если нестоэдр  $P$  флаговый, то последовательной срезкой граней ко-размерности 2 можно получить  $P$  из куба  $I^n$  и пермutoэдр  $Pe^n$  из  $P$ .

**Теорема 2.** Пусть  $P$  - флаговый нестоэдр, тогда  $0 \leq \gamma_i(P) \leq \gamma_i(Pe^n)$ .

Каждый нестоэдр является многогранником Дельзанта, и, согласно теореме Дельзанта, существует симплектическое многообразие с гамильтоновым действием тора, такое что нестоэдр является образом соответствующего отображения моментов. В этом случае, согласно теореме Дэвиса-Янушкевича, коэффициенты  $h$ -полинома многогранника совпадают с числами Бетти полученного симплектического многообразия. Таким образом, гипотеза Гала напрямую связана с дифференциальной геометрией гамильтоновых торических многообразий.

Литература

1. В. Д. Володин. Кубические реализации флаговых нестоэдров и доказательство гипотезы Гала для них. УМН, 65:1(391) (2010), 183–184
2. Н. Ю. Ероховец. Геометрия, топология и математическая физика. II, Тр. МИАН, 266, Наука, М., 2009, 127–139.
3. A. G. Fenn. Generating functions of nestohedra and applications. arXiv: 0908.0605 v1 [math.CO] 5 Aug 2009.
4. S. R. Gal. Real root conjecture fails for five- and higher-dimensional spheres. Discrete Comput. Geom. 34 (2005), no.2, 269–284.
5. A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams. Faces of generalized permutohedra. arXiv: math/0609184 v2 [math.CO] 18 May 2007.