Секция «Математика и механика»

Максимальные действия торов на момент-угол многообразиях

Ероховец Николай Юрьевич
Аспирант
МГУ, Москва, Россия
E-mail: erochovetsn@hotmail.com

Выпуклые многогранники служили объектом исследований ещё с древности, вспомним хотя бы Платоновы правильные тела, формулу Эйлера и многое другое. Торическая топология даёт новый взгляд на простые многогранники. По каждому простому n-мерному многограннику P с m гипергранями можно канонически построить *момент-угол многообразие* $\mathcal{Z}_P$ (см. [1]) с действием m-мерного тора T^m, причём $\mathcal{Z}_P/T^m = P$.

Оказывается, для некоторых многогранников существует торическая подгруппа, изоморфная T^{m-n}, действующая свободно. Факторпространство по действию такой подгруппы называется *квазиторическим многообразием.* Однако, далеко не все многогранники допускают хотя бы одно квазиторическое многообразие. *Инвариантом Бухштабера* $s(P)$ простого многогранника называется наибольшая размерность торической подгруппы тора T^m, действующей свободно. Это число, в некотором смысле, измеряет симметрию момент-угол многообразия, отвечающего многограннику.

Проблема, которую поставил В. М. Бухштабер в 2002 году, заключается в том, чтобы найти простое комбинаторное описание s-числа.

Мы покажем, что s-число удовлетворяет следующим свойствам (см. [2, 3]):
1. Для любого простого многогранника, кроме симплекса, $s(P) \geqslant 2$;
2. Существуют простые многогранники со сколь угодно большим $\nu = m - n$ и $s(P) = 2$;
3. $s(P)$ не определяется только f-вектором и хроматическим числом γ многогранника;
4. $s(P) \geqslant m - \gamma + s(\Delta_{n-1}^{\gamma-1})$;
5. При i-флипе для $1 < i < n$ число $s(P)$ изменяется не более, чем на 1;
6. Для флаговых многогранников $s(P) \geqslant [(m-n)/2]$;

Также мы найдём значение $s(P)$ для всех простых n-мерных многогранников с $n+3$ гипергранями и покажем, что в этом случае оно выражается через биградуированные числа Бетти момент-угол многообразия, которые сами по себе являются комбинаторными инвариантами простого многогранника, определяющими его f-вектор. При этом мы вычислим и сами биградуированные кольца когомологий соответствующих момент-угол многообразий.

Литература

1. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2004.

2. Н. Ю. Ероховец, *Инвариант Бухштабера простых многогранников*, УМН, 2008, 63:5(383), 187–188.

3. N. Erokhovets, *Buchstaber invariant of simple polytopes*, arXiv: math.AT/0908.3407

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановку задачи и постоянное внимание к работе и Т. Е. Панову за ценные замечания.