Секция «Математика и механика»

О связи числа Бухштабера и хроматических инвариантов

Айзенберг Антон Андреевич
Аспирант
МГУ, мех-мат, Москва, Россия
E-mail: ayzenberga@gmail.com

Основным объектом изучения в данной работе является число Бухштабера. Пусть K — абстрактный симплициальный комплекс на m вершинах. Симплициальному комплексу K стандартным способом сопоставляется момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$. Момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ представляет из себя топологическое пространство с действием тора T^m. В общем случае действие тора не является свободным, что приводит к задаче: найти наибольшую размерность торических подгрупп $H \subset T^m$, действующих свободно на $\mathcal{Z}_K$. Полученное целое число называется числом Бухштабера симплициального комплекса K и обозначается $s(K)$. В.М.Бухштабер сформулировал задачу: найти описание инварианта $s(K)$ в комбинаторных терминах [1]. Мы предлагаем подход к решению задачи Бухштабера, использующий понятие универсальных симплициальных комплексов, введенных в работе Дэвиса и Янушкиевича в 1991м году [4].

Пусть $\{U_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ — последовательность универсальных симплициальных комплексов. Для данного комплекса K определим наименьшее число l, для которого существует невырожденное отображение из K в U_l. Если обозначить это число через $r(K)$, то справедлива формула: $s(K) = m - r(K)$. Таким образом, число Бухштабера можно определить через существование невырожденных отображений в универсальные комплексы. Заметим, что если в определении числа $r(K)$ заменить универсальные комплексы на симплексы, то полученный инвариант будет в точности хроматическим числом комплекса K. Подобная взаимосвязь позволяет установить несколько оценок на число Бухштабера, в частности, получена точная формула для одномерных комплексов K:

$$s(K) = m - \lceil \log_2(\gamma(K) + 1) \rceil.$$

Также получено обобщение хроматического многочлена графа до многочлена $P_K(t)$, позволяющего узнать некоторую информацию о числе Бухштабера. Работа опирается на результаты работ [3],[2].

Литература

1. Бухштабер В. М. и Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. МЦНМО, М. 2004

2. Ероховец Н. Ю., Инвариант Бухштабера простых многогранников // УМН, 63:5(383) (2008), 187–188.

3. Изместьев И. В.. Математические заметки // 69:3 (2001), 375-382.

4. Davis M., Januszkievicz T. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. v.**62**., №2. P.417–451.