---

15 марта 2017

Н. В. Богачев (МГУ)

Арифметические группы отражений в пространствах Лобачевского

Пусть F – вполне вещественное поле алгебраических чисел и A – кольцо его целых элементов. Пусть $f(x) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j$ – такая квадратичная форма над F сигнатуры $(n,1)$, что при любом нетождественном вложении $s\colon F \to \mathbb{R}$ соответствующая квадратичная $f^s(x) = \sum_{i,j=0}^{n} s(a_{ij})x_ix_j$ является положительно определенной. В таком случае группа $O?(f,A)$ целочисленных (с коэффициентами из кольца A) линейных преобразованиий, сохраняющих форму f и не меняющих местами связные компоненты конуса $x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) < 0$, является дискретной группой движений пространства Лобачевского $\mathbb{L}^n$, и называется арифметической дискретной группой.

Если $O_r(f,A)$ – подгруппа группы $O(f,A)$, порожденная отражениями, является подгруппой конечного индекса, то форма f называется рефлективной, а группа $O_r(f,A)$ – арифметической группой отражений. Имеется критерий арифметичности для дискретных групп отражений в пространствах Лобачевского с фундаментальным многогранником конечного объема.

Гиперболической решеткой L называется свободная абелева группа, снабженная целочисленной симметрической билинейной формой (Δ,Δ) сигнатуры $(n,1)$. При $F = \mathbb{Q}$ (в этом случае $A = \mathbb{Z}$) арифметическая группа как раз превращается в группу автоморфизмов гиперболической решетки. Гиперболическая решетка L называется рефлективной, если ее группа автоморфизмов содержит подгруппу конечного индекса, порожденную отражениями.

Недавно было доказано, что с точностью до подобия имеется лишь конечное число максимальных арифметических групп отражений в пространствах Лобачевского (значит, и рефлективных гиперболических решеток), что сделало задачу их полной классификации вполне осмысленной. В докладе будет изложена история данного вопроса и основные известные результаты, а также будет рассказано о методах классификации рефлективных гиперболических решеток, в частности, о недавних результатах докладчика (см. https://arxiv.org/abs/1610.06148).