Записки лекций по симплектической геометрии и топологии

М.В. Прасолов, В.А. Шастин

16 октября 2018

Содержание

1 Немного истории

На примере трёх сюжетов мы познакомимся с предысторией основных понятий симплектической геометрии – симплектической матрицы, гамильтониана и симплектической формы.

1.1 Линейная оптика и симплектические матрицы

Пусть z, q – координаты на плоскости. Мы собираемся описать преломление лучей света в среде с переменной скоростью света. Мы будем считать, что лучи испускаются из точки (z_0, q_0) при малом q_0 под (ориентированным) углом θ_0 к оси Oz, близким к нулю. Также мы будем считать, что есть конечное число областей с постоянной скоростью света, а границы между областями – это регулярные дважды дифференцируемые кривые, ортогональные оси Oz.

Случай постоянной скорости света. В этом случае луч света движется по прямой. Если в точке (z_0, q_0) он летел под углом θ_0, то в момент, когда его $z-$координата станет равной z_1, его q-координата будет $q_1 = q_0 + (z_1 - z_0)\operatorname{tg}\theta_0$, а угол $\theta_1 = \theta_0$ сохранится. Перепишем это равенство в матричном виде, переходя к координатам $(q, n\theta)$ (здесь $1/n$ – скорость света, смысл замены будет ясен из дальнейшего) и заменяя $\operatorname{tg}\theta_0$ на θ_0, то есть заменяя функцию на её первое приближение:

$$\begin{pmatrix} q_1 & n\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & n\theta_0 \end{pmatrix} A_{z_0 \to z_1}, \qquad A_{z_0 \to z_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n(z_1 - z_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай одной границы. Пусть луч света вылетел из точки (z_0, q_0) области со скоростью $1/n_0$ под углом θ_0 и пересёк границу в точке (z, q). Если идти по границе сред от оси Oz до точки (z, q), то нормаль к кривой повернётся на (ориентированный) угол qk, где k – это кривизна кривой (в точке пересечения с осью), выбранная с правильным знаком. Выражение qk получается из того факта, что в натуральной параметризации скорость вращения вектора скорости кривой есть кривизна кривой, что координата q задаёт натуральную параметризацию на кривой с точностью до квадратичной по q погрешности и что линейная часть выражения qk не зависит от поведения функции k в окрестности. Следовательно луч пересечёт границу под углом $\theta_0 - qk$ к её нормали.

Применим закон преломления: отношение скорости света к синусу угла между лучом и нормалью к границе сред одинаковое до пересечения границы и после.

Упражнение. Пусть A_1 и A_2 – точки, находящиеся по разные стороны от прямой ℓ, n_1 и n_2 – положительные константы. Найдите на прямой ℓ такую точку X, что величина $n_1 \cdot A_1X + n_2 \cdot A_2X$ минимальна.

Пользуясь принципом Ферма, то есть что луч света летит по траектории, на движение по которой потратит меньше времени, докажите закон преломления.

Тогда после преломления луча угол к нормали границы станет равным $(\theta_0 - qk) \cdot \cdot n_0/n_1$ (после отбрасывания квадратичных по q_0 и θ_0 членов). А угол к оси Oz будет $(\theta_0 - qk) \cdot n_0/n_1 + qk$. Условно обозначая точку пересечения лучом границы за (z_-, q_-) до пересечения и за (z_+, q_+) – после пересечения, запишем равенство в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} q_+ & n_1\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_- & n_0\theta_0 \end{pmatrix} A_{z_-\to z_+}, \qquad A_{z_-\to z_+} = \begin{pmatrix} 1 & k(n_1 - n_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если луч света не пересекал больше границ сред, то конечные параметры луча выражаются через начальные с помощью произведения трёх матриц:

$$\begin{pmatrix} q_1 & n_1\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & n_0\theta_0 \end{pmatrix} A_{z_0\to z_1}, \qquad A_{z_0\to z_1} = A_{z_0\to z_-} A_{z_-\to z_+} A_{z_+\to z_1},$$

где первая и третья матрицы в правом выражении строятся аналогично случаю постоянной скорости света. Обратите внимание, что замена координаты $\theta \to n\theta$ обеспечила нам равенство определителя любой матрицы единице, то есть определитель матрицы $A_{z_0\to z_1}$ тоже равен 1. Больше ограничений нет: любую матрицу с определителем 1 можно представить в виде произведения матриц с единицами на диагонали и одним нулём. Матрицы с определителем 1 называются специальными, а в случае 2×2 ещё они называются симплектическими матрицами.

Упражнение. Докажите, что любая матрица 2×2 с определителем 1 раскладывается в произведение матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай линзы. Пусть теперь луч света проходит через тонкую область, где скорость света равна $1/n_1$, причём эта область ограничена двумя дугами окружности – у окружности, которую луч пересекает первой, кривизна равна $-1/R_1$, а у второй – $1/R_2$. (Это соответствует тому, что линза выпуклая в обе стороны.)

Пусть z_0 и z_1 – это такие точки оси Oz, что лучи, вышедшие из них и прошедшие линзу, становятся параллельными оси Oz. Пусть линза находится на оси q. Тогда $|z_0|$ и $|z_1|$ называются фокусными расстояниями линзы. Вычислим преобразование параметров лучей:

$$A_{z_0\to z_1} = A_{z_0\to 0_-}A_{0_-\to 0}A_{0\to 0_+}A_{0_+\to z_1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n_0z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(n_1-n_0)/R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (n_0-n_1)/R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_0z_1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n_0z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_0z_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -n_0z_0 & -n_0z_0\lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_0z_1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+\lambda n_0z_1 & \lambda \\ -n_0z_0+(-n_0z_0\lambda+1)n_0z_1 & -n_0z_0\lambda+1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda = (n_0-n_1)(1/R_1+1/R_2)$.

Из условия, что z_0 и z_1 – фокусы, следует, что у матрицы $A_{z_0\to z_1}$ на диагонали стоят нули, то есть
$$\frac{1}{z_1} = -\frac{1}{z_0} = (n_1-n_0)n_0(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}),$$
что при $n_0 = 1$ превращается в обычную формулу линзы.

Случай линзы в пространстве. Аналогично можно записать формулы в пространстве с координатами z, q_1, q_2, где у луча берутся (ориентированные) углы θ_1, θ_2, которые составляет его проекция соответственно на плоскости Ozq_1, Ozq_2 с осью Oz. Тогда аналогично матрицы преобразований параметров лучей получаются композицией двух видов матриц:
$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ A & E_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_2 & B \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$
где E_2 – единичная матрица, а A и B – любые матрицы 2×2.

Упражнение. Покажите это. *Указание.* Поворотом плоскости Oq_1q_2 сведите к случаю, когда главные кривизны граничной поверхности направлены вдоль осей Oq_1 и Oq_2. В этом случае проведите аналогичное плоскому случаю рассуждение.

Упражнение. Покажите, что если $X = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ A & E_2 \end{pmatrix}$ и $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$, то $X^T\Omega X = \Omega$.

Матрицы, удовлетворяющие последнему равенству из упражнения, называются симплектическими матрицами. Аналогично случаю 2×2, любая симплектическая матрица представляется в виде произведений двух видов матриц, указанных выше.

Идеи этого параграфа принадлежат Гамильтону. Продолжение смотрите в книге [GS84].

1.2 Гамильтонов формализм ньютоновской механики

Запишем уравнения Ньютона для движения частицы $x(t)$ с массой m в стационарном поле с потенциалом $u(x)$:

$$m\ddot{x} = -\nabla_x U.$$

Как известно, вдоль решений этого уравнения сумма $H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$ кинетической и потенциальной энергии сохраняется. Введём координаты $q^i = x^i$, $p_i = m\dot{x}^i$. Обратите внимание, что за добавленные координаты мы взяли не скорости $\dot{x}^i$, а импульсы p_i, которые отличаются коэффициетом m. Эта замена полностью аналогична замене из предыдущего сюжета, где координата $n\theta$ играла роль импульса, а скорость была равна θ/n (**упражнение:** проверить). Перепишем в новых координатах функцию $H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ и уравнения Ньютона:

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H \\ \dot{p} = -\nabla_q H, \end{cases}$$

что можно переписать в матричном виде через градиент H по всем координатам:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} = \nabla H \cdot \Omega, \ \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Итак, мы перешли от дифференциального уравнения второго порядка в координатах x на конфигурационном пространстве к дифференциальному уравнению первого порядка в координатах (q, p) на фазовом пространстве. Решения уравнений первого порядка совпадают с траекториями некоторого векторного поля. Векторное поле, заданное системой 1 называется гамильтоновым. Как заметил Пуанкаре [Poin99], поток гамильтонова векторного поля сохраняет объём, а значит, у соответствующей системы дифференциальных уравнений не может быть ассимптотически устойчивого решения, ведь окрестность устойчивого решения сдавливается внутрь.

В заключение отметим, что аппарат симплектической геометрии переносится с геометрической оптики и классической механики на квантовую механику.

1.3 Линейный комплекс прямых

Этот сюжет относится к проективной геометрии. Пространство прямых в вещественном трёхмерном проективном пространстве можно снабдить проективными координатами. А именно, любой прямой ℓ, проходящей через различные точки a и b с однородными координатами $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ и $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$, сопоставим точку $a \wedge b$ пятимерного проективного пространства с координатами

$$\left(\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right).$$

Легко видеть, что при домножении однородных кординат точки a или b на число и при выборе другой пары различных точек на прямой ℓ, точка $a \wedge b$ не меняется.

Однородные координаты точки $a \wedge b$ называются координатами Плюккера прямой ℓ, а отображение называется отображением Плюккера. Обозначим координаты пятимерного пространства $(c_{01} : c_{02} : c_{03} : c_{12} : c_{13} : c_{23})$. Тогда образ отображения Плюккера можно задать одним уравнением: $c_{01}c_{23} - c_{02}c_{13} + c_{03}c_{12} = 0$. Тем самым пространство прямых становится гиперповерхностью 2-го порядка в проективном пространстве.

Упражнение. Постройте бескоординатный аналог отображения Плюккера: пусть ξ и η – линейные функции на $\mathbb{R}^4$. Тогда отображение $(\xi, \eta) \mapsto \xi \wedge \eta \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)^*$, которое сопоставляет паре линейных функций кососимметричную билинейную функцию, индуцирует сопоставление каждого двумерного подпространства некоторому одномерному (а после проективизации прямым сопоставляет точки). Покажите, что образ этого отображения задаётся уравнением $\psi \wedge \psi = 0 \in \bigwedge^4(\mathbb{R}^4)^*$.

Имея такое представление пространства прямых, естественно назвать его подмножество *линейным* комплексом прямых, если оно задаётся одним линейным соотношением на координаты Плюккера.

Упражнение. Докажите, что любое линейное соотношение на плюккеровы координаты множества кососимметричных форм $\psi \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)^*$ задаётся единственным способом в виде $\psi \wedge \omega = 0$, где $\omega \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)^*$ фиксированно.

Если мы интересуемся группой преобразований фиксированного линейного комплекса прямых, сохраняющих проективную структуру, то мы получаем проективные преобразования $\mathbb{R}P^3$ с матрицей, сохраняющей форму ω из последнего упражнения. Сначала такую группу называли «комплекс-группой» или «группой линейного комплекса», но из-за путаницы с комплексными числами Герман Вейль [Weyl39] предложил название «симплектическая группа». *Симплектический* – это калька с греческого $\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\varepsilon\varkappa\tau\iota\varkappa\acute{o}\sigma$ (сплетающий, соединяющий [Veys99]), что является переводом с латинского *complexus*. По иронии судьбы между комплексной и симплектической геометриями позже обнаружилась глубокая связь.

Список литературы

[GS84] Guillemin V., Sternberg Sh. *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, 1984.

[Poin99] Poincaré H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Tome III.* Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1899.

[Weyl39] Вейль Г. *Классические группы. Их инварианты и представления.* Государственное издательство иностранной литературы, Москва, 1947.

[Veys99] Вейсман А. *Греческо-русский словарь.* Издание автора, Санкт-Петербург, 1899.

2 Геометрия векторного пространства с кососимметричной билинейной формой

Этот раздел относится к линейной алгебре. В этом разделе размерность векторных пространств мы считаем конечной.

Напомним, что действие оператора на векторном пространстве продолжается до действия на тензорной алгебре, и, в частности, оператор A переводит билинейную форму $b(\cdot,\cdot)$ в форму $(A_2 b)(x,y) = b(Ax, Ay)$. Если $A_2 b = b$, то мы говорим, что оператор A сохраняет форму b. Если форма b невырожденная, то есть её правое (и левое) ядро нулевое, то операторы, сохраняющие форму b, образуют группу $O(b)$ относительно композиции.

Упражнение. Проверьте, что операторы, сохраняющие невырожденную билинейную форму, обратимы.

Упражнение. Пусть характеристика поля отлична от 2. Тогда оператор, сохраняющий форму, должен сохранять её симметричную и кососимметричную части по отдельности.

Указание. Это следует из линейности действия оператора на пространстве форм и единственности разложения формы на симметричную и кососимметричную части.

Последнее упражнение говорит, что $O(b) = O(\frac{b+b^T}{2}) \cap O(\frac{b-b^T}{2})$ (множества в равенстве не обязаны образовывать группу). Случай вещественной положительно определённой симметричной формы подробно разбирается в стандартном курсе. Любые две такие формы переводятся друг в друга невырожденным оператором, а группа $O(b)$ в этом случае совпадает с группой $O(n)$ изометрий евклидова пространства E^n. В неопределённом случае мы получаем группы $O(p,q)$ изометрий псевдоевклидова пространства, где p и q – индексы инерции формы b. Естественно дальше перейти к группе операторов, сохраняющих вещественную кососимметричную форму.

2.1 Примеры симплектических форм

Пусть ω – невырожденная кососимметричная билинейная форма на векторном пространстве V. Форму ω мы будем называть симплектической, а пространство V – симплектическим.

Пример. Пусть X – векторное пространство, X^* – пространство линейных функций на X, и $V = X \oplus X^*$. Тогда форма $\omega(x \oplus \xi, y \oplus \eta) = \eta(x) - \xi(y)$ есть симплектическая форма на V.

Пример. Пусть V – эрмитово пространство, то есть комплексное векторное пространство с такой (полуторалинейной) формой h, что

$$h(x, k\cdot y) = k\cdot h(x,y)\ k\in\mathbb{C}, \quad h(x,y) = \overline{h(y,x)}, \text{ и } h(x,x) > 0 \text{ при } x > 0.$$

Разложим форму h в сумму $\left(\frac{h+\bar{h}}{2}\right)+i\left(\frac{h-\bar{h}}{2i}\right)$ вещественной и мнимой частей. Каждое слагаемое есть (вещественная) билинейная форма на вещественном пространстве $V_{\mathbb{R}}$, которое получается из пространства V, если запретить умножать его вектора на **не** вещественные числа, а все остальные операции оставить как есть. Пространство $V_{\mathbb{R}}$ называется овеществлением пространства V. Тогда форма $\omega = \frac{h-\bar{h}}{2}$ есть симплектическая форма на $V_{\mathbb{R}}$.

Упражнение. Докажите, что в обоих примерах форма невырожденна.

Указание. Постройте базис, в котором матрица формы обратима.

В обоих примерах размерность пространства была чётной. Это следствие теоремы из стандартного курса [Винберг]:

Теорема. *Для любой кососимметричной билинейной формы b найдётся базис $e_1,\ldots,e_n$, $f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_l$, в котором матрица формы имеет следующий вид*

$$\begin{pmatrix} 0_{nn} & E_n & 0_{nl} \\ -E_n & 0_{nn} & 0_{nl} \\ 0_{ln} & 0_{ln} & 0_{ll} \end{pmatrix},$$

где E_n – единичная матрица $n\times n$, 0_{km} обозначает матрицу размера $k\times m$ из всех нулей, размерность ядра $\ker b$ формы обозначена за l. То есть $b(e_i,f_j)=\delta_{ij}=-b(f_j,e_i)$, а остальные значения формы b на парах векторов базиса нулевые.

Базис из теоремы называется *базисом Дарбу.* Из этой теоремы также следует, что любые две симплектические формы переводятся друг в друга обратимым оператором, который переводит базис Дарбу одной формы в базис Дарбу другой.

2.2 Геометрия подпространств симплектического пространства

Пусть W – подпространство симплектического пространства V, тогда его симплектическим дополнением называется подпространство $W^\omega = \{v\in V \mid \omega(v,w)=0\ \forall w\in W\}$, состоящее из всех векторов V, ω-ортогональных подпространству W. Из невырожденности ω следует, что

$$\dim W + \dim W^\omega = \dim V, \text{ и } (W^\omega)^\omega = W.$$

Подпространство W называется

- симплектическим, если $W\cap W^\omega = 0$;
- изотропным, если $W\subset W^\omega$;
- коизотропным, если $W\subset W^\omega$;
- лагранжевым, если $W=W^\omega$.

Упражнение. Докажите, что одномерные подпространства изотропны и что для любого одномерного подпространства L найдётся такое одномерное подпространство N, что их сумма $L \oplus N$ есть симплектическое подпространство.

Упражнение. Докажите, что если W – симплектическое подпространство, то $W \oplus W^\omega = V$ и W^ω – симплектическое.

Эти два упражнения дают доказательство существования базиса Дарбу по индукции.

В евклидовом пространстве любые два подпространства одной размерности переводятся друг в друга изометрией всего пространства. Возникает естественный вопрос: какие подпространства *симплектического* пространства переводятся друг в друга оператором, сохраняющим симплектическую форму ω? Как показывает следующее упражнение, размерность ядра ограничения формы ω на подпространства должна совпадать:

Упражнение. Если оператор A сохраняет форму ω, то $A \cdot W^\omega = (A \cdot W)^\omega$ для любого подпространства W.

Так как такой оператор обратим, то и размерность двух таких подпространств должна совпадать. Оказывается, этих условий достаточно:

Теорема Витта. *Пусть W_1 и W_2 – два подпространства симплектического подпространства V с формой ω, $\dim W_1 = \dim W_2$ и $\dim \ker \omega\Big|_{W_1} = \dim \ker \omega\Big|_{W_2}$. Тогда существует оператор A пространства V, сохраняющий форму ω и переводящий одно подпространство в другое: $A \cdot W_1 = W_2$.*

Упражнение. Докажите теорему Витта.

Указание. Докажите, что любой базис Дарбу ограничения формы на подпространство расширяется до базиса Дарбу всего пространства.

Операторы, сохраняющие симплектическую форму, будем называть симплектическими.

2.2.1 Примеры лагранжевых подпространств

Изотропные подпространства имеют размерность не выше $\dim V/2$, как следует из определения и соотношения на размерность симплектического дополнения. При этом максимальные по включению изотропные подпространства лагранжевы и наоборот.

Пример. Пусть $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ – базис Дарбу. Тогда $< e_1, \ldots, e_n >$ и $< f_1, \ldots, f_n >$ лагранжевы.

Пример. Возьмём линейное отображение $A : X \to X^*$. Тогда его график $\Gamma(A) = \{x \oplus A \cdot x \ \in X \oplus X^*\}$ лагранжев относительно симплектической формы $\omega(x\oplus\xi, y\oplus\eta) = \eta(x)-\xi(y)$, если и только если линейное отображение A самосопряжено, то есть $A = A^* : (X^*)^* \to X^*$, где $(X^*)^*$ канонически изоморфно X.

Пример. Пусть ω – симплектическая форма на V. Тогда график оператора A, $\Gamma(A) = = \{v \oplus A \cdot v \ \in V \oplus V\}$, лагранжев относительно формы $-\omega \oplus \omega$, если и только если оператор A симплектический.

2.3 Внешняя степень симплектической формы и ориентация

Пространство полилинейных кососимметричных k-форм на V мы будем обозначать $\bigwedge^k V^*$. По k-форме α^k и l-форме β^l можно построить $(k+l)$-форму

$$\alpha^k \wedge \beta^l(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \alpha^k(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta^l(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}),$$

которая называется внешним произведением форм α^k и β^l. Здесь S_{k+l} – группа перестановок $k+l$ элементов. Обратите внимание, что переставляя индексы $1, \ldots, k$ только между собой и индексы $k+1, \ldots, k+l$ только между собой, мы получаем $k!l!$ равных слагаемых – на этот множитель мы и делим сумму.

Из определения вытекает $\alpha^k \wedge \beta^l = (-1)^{kl} \beta^l \wedge \alpha^k$, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ и $\alpha \wedge (C\beta + \gamma) = C\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$, где C – число.

Упражнение. Пусть $x^1, \ldots, x^d$ – координатные функции на пространстве V^d. Тогда

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^d(v_1, \ldots, v_d) = \det((x^i(v_j))_{\substack{i=1\ldots d \\ j=1\ldots d}}).$$

Упражнение. Пусть $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$ – координаты в базисе Дарбу формы ω. Тогда $\omega = x^1 \wedge y^1 + \cdots + x^n \wedge y^n$ и $\omega^{\wedge n} = n! \cdot x^1 \wedge y^1 \wedge \cdots \wedge x^n \wedge y^n$.

Из этих упражнений вытекает, что $\omega^{\wedge n}$ задаёт ориентацию на пространстве V: любому базису приписывается знак значения $2n$-формы $\omega^{\wedge n}$ на этом базисе. Например, базис Дарбу имеет знак $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Задача. Пусть B – кососимметричная матрица размера d, β – билинейная форма с матрицей B в координатах $x^1 \ldots, x^d$. Тогда $\beta^{\wedge d} = \text{Pf } B \cdot x^1 \wedge \cdots \wedge x^d$, где $\text{Pf } B$ – некоторое выражение от коэффициентов матрицы B, которое называется Пфаффианом кососимметричной матрицы B. Докажите, что $\det B = (\text{Pf } B)^2$.

2.4 Симплектическая группа

2.4.1 Положение относительно других классических групп

Группу операторов, сохраняющих симплектическую форму, будем называть симплектической.

Из существования базиса Дарбу вытекает, что эта группа определяется лишь размерностью объемлющего пространства. Симплектическая группа в $2n$-мерном пространстве обозначается $\mathrm{Sp}(2n)$.

Если оператор сохраняет форму ω, то он сохраняет и форму $\omega^{\wedge n}$:

$$A \cdot \omega^{\wedge n} = (A \cdot \omega)^{\wedge n} = \omega^{\wedge n}.$$

Значит, симплектический оператор обязан сохранять объём, то есть его определитель равен 1 и $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n)$.

Вспомним второй пример симплектической формы в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Если вещественный оператор сохраняет эрмитову форму h, то он по отдельности сохраняет её вещественную часть g и мнимую часть ω. Это следует из единственности разложения $h = g + i\omega$, где g и ω – вещественные, а также вещественности и линейности оператора.

Упражнение. Докажите, что форма g симметрична и положительно определена, а форма ω симплектическая.

Отсюда мы получаем $\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n)$, где $\mathrm{U}(n)$ – группа унитарных матриц, то есть сохраняющих эрмитову форму.

Формы g и ω выражаются друг через друга с помощью оператора комплексной структуры: $\omega(x, iy) = \operatorname{Im} h(x, iy) = \operatorname{Im} ih(x, y) = \operatorname{Re} h(x, y) = g(x, y)$, а также $\omega(x, y) = -g(x, iy)$. Поэтому симплектический оператор, коммутирующий с оператором комплексной структуры, также обязан сохранять форму g, а ортогональный оператор, коммутирующий с оператором комплексной структуры, также обязан сохранять форму ω.

Значит, $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n)$.

2.4.2 Спектр симплектического оператора

Запишем условие симплектичности оператора Φ в матричном виде:

$$\Phi^T \Omega \Phi = \Omega \iff \Omega^{-1} \Phi^T \Omega = \Phi^{-1}.$$

То есть матрицы Φ^{-1} и Φ^T подобны, а значит, их характеристические многочлены совпадают. Как известно, характеристические многочлены Φ^T и Φ также совпадают.

Утверждение. *Если λ – собственное число симплектического оператора, то λ^{-1} – тоже его собственное число.*

Так как симплектический оператор вещественный, то вместе с каждым собственным числом λ в спектре лежит его комплексно сопряжённое $\bar{\lambda}$.

Получается, что собственные числа симплектического оператора разбиваются на четвёрки $\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}$ для невещественного λ, на пары λ, λ^{-1} для вещественного не равного по модулю 1, на группу единиц и группу минус единиц.

Так как определитель симплектической матрицы равен 1, то кратность собственного числа -1 чётна. Из чётности размерности всего пространства вытекает также, что кратность единицы тоже чётна.

2.4.3 Блочный вид симплектического оператора

Пусть в базисе Дарбу симплектический оператор Φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A, B, C, D – матрицы $n \times n$.

Как было замечено выше,

$$\Phi^{-1} = \Omega^{-1}\Phi^T\Omega = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}.$$

Видно, что обратную к симплектической матрице (как и для ортогональных матриц) можно очень быстро вычислить. Сравните с методом Гаусса в случае общих матриц.

Из условия $\Phi^{-1}\Phi = E$ получаем $(A^TC)^T = A^TC$, $(B^TD)^T = B^TD$ и $A^TD - C^TB = E$.

$(A^TC)^T = A^TC$ и $(B^TD)^T = B^TD$ равносильны тому, что оператор Φ переводит два стандартных координатных лагранжевых подпространства в лагранжевы подпространства.

Условие $A^TD - C^TB = E$ в случае $n = 1$ превращается в равенство определителя единице.

Упражнение. Зафиксируем вектор $v_0 \in V$ в симплектическом пространстве с формой ω. Докажите, что оператор $v \mapsto v + \omega(v_0, v)v_0$ симплектический. Такой оператор называется *трансвекцией*. Сравните с видом оператора симметрии в ортогональном случае.

Задача. Покажите, что симплектическая группа порождена трансвекциями.

Список литературы

[Винберг] Винберг Э.Б. *Курс алгебры.* МЦНМО, Москва, 2017.

3 Топология симплектической группы и лагранжева грассманиана

В дальнейшем мы будем изучать эволюцию лагранжевой плоскости, к которой применяется симплектический оператор, зависящий от времени. В связи с этим в текущем сюжете мы поговорим о симплектической группе и лагранжевом грассманиане с точки зрения алгебраической топологии. Это будет напоминать классические конструкции алгебраической топологии для ортогональной группы и многообразий Грассмана.

Сначала мы сведём вопросы связности и стягиваемости петель на симплектической группе к гомотопически ей эквивалентной унитарной группе.

Соглашение. В этой лекции мы отождествляем симплектическое пространство $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ с эрмитовым пространством $(\mathbb{C}^n, h)$, где $\omega(x, y) = \operatorname{Im} h(x, y)$. При этом на пространстве возникает скалярное произведение $g(x, y) = \operatorname{Re} h(x, y)$, причём если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис для эрмитовой формы h, то $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ есть ортонормированный базис для скалярного произведения g и базис Дарбу для симплектической формы ω.

3.1 Деформационная ретракция $\mathrm{Sp}(2n)$ на $\mathrm{U}(n)$

Пусть $\Phi = BU$ – полярное (относительно скалярного произведения g) разложение симплектического оператора Φ. Мы хотим устроить деформационную ретракцию $\Phi \mapsto B^{1-t}U$, где $t \in [0, 1]$. При $t = 1$ оператор Φ перейдёт в U, ортогональный оператор. Как мы знаем из прошлой лекции, $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{U}(n)$, а значит, $U \in \mathrm{U}(n)$. Тем самым группа $\mathrm{Sp}(2n)$ стянется на подгруппу $\mathrm{U}(n)$, причём последняя остаётся при деформации неподвижной.

Шаг 1. Сначала покажем, что деформация происходит внутри группы $\mathrm{Sp}(2n)$, то есть что $B^{1-t}U = B^{-t}\Phi$ – симплектический оператор. Для этого достаточно показать, что B^t – симплектический оператор для любого t.

Напомним, что $B = (\Phi\Phi^*)^{1/2}$. Если Φ – симплектический, то и Φ^* – симплектический, что легко проверить для матриц этих операторов в базисе, являющимся одновременно ортонормированным для скалярного произведения g и базисом Дарбу для симплектической формы ω. Значит, $\Phi\Phi^*$ – симплектический.

Пусть $v_1, \ldots, v_{2n}$ – базис собственных векторов положительного оператора $\Phi\Phi^*$ и $\Phi\Phi^* v_i = \lambda_i v_i$, где $\lambda_i > 0$. Тогда $B^t v_i = (\Phi\Phi^*)^{t/2} v_i = \lambda_i^{t/2} v_i$ и

$$\omega(B^t v_i, B^t v_j) = (\lambda_i \lambda_j)^{t/2} \omega(v_i, v_j) \stackrel{?}{=} \omega(v_i, v_j).$$

Последнее равенство верно при $t = 2$, так как оператор $\Phi\Phi^* = B^2$ – симплектический, а значит, верно для любых t. Другими словами, оператор B^t – симплектический.

Упражнение. Пусть вектора v_1 и v_2 – собственные для симплектического оператора Φ, причём $\Phi v_1 = \lambda_1 v_1$ и $\Phi v_2 = \lambda_2 v_2$. Тогда $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ или вектора v_1 и v_2 косоортогональны.

Шаг 2. Непрерывность отображения $\mathrm{Sp}(2n) \times [0,1] \to \mathrm{Sp}(2n)$, где $\Phi \mapsto (\Phi\Phi^*)^{-t/2}\Phi$, следует из непрерывности отображения $\Phi \mapsto \Phi\Phi^*$, непрерывности возведения в степень на пространстве положительных операторов и непрерывности композиции операторов. Первое и третье очевидно, потому что соответствующие функции записываются многочленами от координат. Что касается непрерывности степени, мы отсылаем читателя к книге [Pedersen, §1.3], если он уже знаком с курсом функционального анализа.

3.2 Связность и фундаментальная группа $\mathrm{U}(n)$

Итак, обсудив гомотопическую эквивалетность $\mathrm{Sp}(2n)$ и $\mathrm{U}(n)$, перейдём к связности и к фундаментальной группе этих пространств. Сначала мы сведём задачу к группе специальных унитарных матриц $\mathrm{SU}(n)$ с помощью гомоморфизма $\det : \mathrm{U}(n) \to \to \mathrm{U}(1) = S^1$, ядро которого есть $\mathrm{SU}(n)$. Затем связность и односвязность группы $\mathrm{SU}(n)$ будем доказывать по индукции по n, а шаг индукции будет осуществляться с помощью действия группы $\mathrm{SU}(n)$ на единичной сфере S^{2n-1} в $\mathbb{C}^n$ со стабилизатором $\mathrm{SU}(n-1)$. Нам понадобится пара классических теорем.

Теорема, [Bredon, §2.13]. *(1) Пусть $G \times M \to M$ – транзитивное гладкое действие группы Ли на гладком многообразии M и $x \in M$. Тогда проекция $g \mapsto g \times x$ есть локально тривиальное расслоение со слоем $\mathrm{Stab}(x)$ – стабилизатор точки p.*

(2) Пусть H – замкнутая подгруппа группы Ли G. Тогда множество смежных классов G/H обладает такой структурой гладкого многообразия, что отображение $G \to G/H$ есть гладкая проекция локально тривиального расслоения со слоем H.

Немного прокомментируем пункт (1) теоремы. При транзитивном действии стабилизаторы любой точки сопряжены, поэтому $\mathrm{Stab}(x)$ в теореме можно заменить на стабилизатор любой другой точки. Слои расслоения суть левые смежные классы по стабилизатору $\mathrm{Stab}(x)$. В нашем случае группа $\mathrm{U}(n)$ действует на окружности единичных по модулю комплексных чисел умножением на определитель: $U \times z = \det(U) \cdot z$. Стабилизатор такого действия есть группа специальных унитарных матриц $\mathrm{SU}(n)$. Отсюда мы получаем расслоение $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{U}(1)$ со слоем $\mathrm{SU}(n)$. В другом случае группа $\mathrm{SU}(n)$ действует на сфере S^{2n-1}, так как унитарные матрицы сохраняют длину. Стабилизатор такого действия есть $\mathrm{SU}(n-1)$, как показывает следующее упражнение, и отсюда мы получаем расслоение $\mathrm{SU}(n) \to S^{2n-1}$ со слоем $\mathrm{SU}(n-1)$.

Упражнение. Пусть специальная унитарная матрица размера n оставляет неподвижным первый базисный вектор. Тогда в первом столбце и первой строке этой матрицы стоят нули, кроме первого места, где стоит 1, а остальные элементы матрицы образуют специальную унитарную матрицу размера $n-1$.

Упражнение. Покажите, что $\mathrm{SU}(2)$ гомеоморфно S^3.

Теорема, [Ф.-Ф., §1.9]. *Пусть $p : E \to B$ – локально тривиальное расслоение, пространство E связно, $x \in E$, $F = p^{-1}(p(x))$ и обозначим вложение $i : F \to E$. Тогда можно определить такие гомоморфизмы $\delta_k : \pi_k(B) \to \pi_{k-1}(F)$, что следующая последовательность групп и гомоморфизмов точна:*

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{k+1}} \pi_k(F) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B) \xrightarrow{\delta_k} \ldots$$

Если мы докажем, что $\mathrm{SU}(n)$ связно, то из связности $\mathrm{U}(1)$ будет следовать, что $\mathrm{U}(n)$ связно, так как тотальное пространство расслоения со связной базой и связным слоем связно. Выпишем конец длинной точной последовательности:

$$\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{U}(n)) \xrightarrow{\det_*} \pi_1(\mathrm{U}(1)).$$

Гомоморфизм $\det_*$ сюрьективен, потому что на самом деле есть вложение $\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{U}(n)$, такое что $\det$ – ретракция. Если мы докажем, что $\mathrm{SU}(n)$ односвязно, то из точности последовательности вытекает, что $\det_*$ – изоморфизм. Тем самым $\pi_1(\mathrm{U}(n)) \overset{\det_*}{\cong}$ $\cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Связность $\mathrm{SU}(n)$ вытекает по индукции из связности $\mathrm{SU}(n-1)$ и S^{2n-1}. Для односвязности выпишем конец длинной точной последовательности:

$$\pi_2(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SU}(n-1)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{2n-1}).$$

Как известно, $\pi_2(S^{2n-1}) = \pi_1(S^{2n-1}) = \{1\}$ при любом $n \geq 2$. Значит, из точности последовательности вытекает, что $\pi_1(\mathrm{SU}(n-1))$ и $\pi_1(\mathrm{SU}(n))$ изоморфны. Поэтому $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{SU}(1)) = \{1\}$. То есть $\mathrm{SU}(n)$ односвязно.

Упражнение. Покажите, что группа $\mathrm{GL}(2n)$ транзитивно действует на пространстве симплектических форм со стабилизатором $\mathrm{Sp}(2n)$. Найдите число связных компонент и размерность этого пространства.

Указание. Для транзитивности воспользуйтесь существованием базиса Дарбу. Для компонент связности и размерности воспользуйтесь существованием локально тривиального расслоения.

Упражнение. Найдите две симплектические формы в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, которые нельзя соединить путём.

Указание. У форм должны различаться знаки определителей матриц.

3.3 Лагранжев грассманиан

Лагранжевым грассманианом $\mathcal{L}(n)$ называется множество лагранжевых подпространств в симплектическом $2n$-мерном пространстве. Так как $\mathcal{L}(n) \subset \mathrm{Gr}(2n, n)$, то топологию на $\mathcal{L}(n)$ можно индуцировать с обычного грассманиана, но мы пойдём другим путём.

3.3.1 Определение и топология

Подействуем унитарной матрицей U на лагранжево подпространство $L_0 =< e_1, \ldots, e_n >_{\mathbb{R}}$, где $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис эрмитовой формы. Мы получим лагранжево подпространство $U \cdot L_0$ с ортонормированным базисом $U \cdot e_i$ в нём. Верно и обратное, и мы можем отождествить группу унитарных матриц с множеством ортонормированных базисов в лагранжевых подпространствах. Подгруппа, сохраняющая L_0, есть вещественные унитарные матрицы, то есть $O(n)$. Отсюда мы получаем, что лагранжев грассманиан можно определить, как множество левых смежных классов

$$\mathcal{L}(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$$

и наделить его структурой гладкого многообразия.

Упражнение. Запишем координаты ортонормированного базиса лагранжева подпространства по столбцам матрицы $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ относительно фиксированного базиса, который есть базис Дарбу для симплектической формы и ортонормированный для скалярного произведения. Проверьте, что $X^T Y = Y X^T$, $X^T X + Y^T Y = E$ и $X + iY$ – унитарная матрица.

Упражнение. Найдите размерность $\mathcal{L}(n)$.

Упражнение. Докажите, что линейный комплекс прямых из первой лекции есть в точности $\mathcal{L}(2)$. Другими словами, плоскость $\xi \wedge \eta \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)^*$ лагранжева, если и только если $\xi \wedge \eta \wedge \omega = 0$.

Можно рассматривать ориентированные лагранжевы подпространства и положительные ортонормированные базисы в них, и аналогично получить ориентированный лагранжев грассманиан $\mathcal{L}_+(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Естественная проекция $\mathcal{L}_+(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) = \mathcal{L}(n)$ «забывания ориентации» есть двулистное накрытие.

Упражнение. Докажите, что $\mathcal{L}(1) \approx \mathcal{L}_+(1) \approx S^1$, $\mathcal{L}_+(2) \approx S^2 \times S^1$ и $\mathcal{L}(2) \approx S^2 \times S^1/\pm$, где $(x, y) \sim (-x, -y)$.

Указание для $n = 2$. Задайте лагранжев грассманиан уравнениями в $\mathbb{R}P^5$ на координаты Плюккера.

3.3.2 Фундаментальная группа

Построим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{O}(n) & \longrightarrow & \mathrm{U}(n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^0 & \longrightarrow & S^1 & \xrightarrow{(\cdot)^2} & S^1 \end{array} \qquad (2)$$

где две вертикальные стрелочки слева – это определитель. Легко показать, что правая вертикальная стрелочка корректно определена.

На самом деле точную последовательность расслоения можно продолжить:

$$\pi_1(\mathrm{O}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{U}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{O}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{U}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{L}(n)).$$

Здесь уже нельзя понимать точность последовательности, как «образ стрелки совпадает с ядром следующей стрелки», потому что не все элементы последовательности являются группами. Однако в данном случае $\pi_0(\mathrm{O}(n))$ и $\pi_0(\mathrm{U}(n))$ – группы, потому что $O(n)$ и $U(n)$ – группы, поэтому точность в члене $\pi_0(\mathrm{O}(n))$ можно понимать в обычном смысле.

Послойные непрерывные отображения расслоений, например, как в диаграмме 2, дают гомоморфизмы соответствующих длинных точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_1(\mathrm{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathrm{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{L}(n)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathrm{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathrm{U}(n)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_1(S^0) & \longrightarrow & \pi_1(S^1) & \xrightarrow{\times 2} & \pi_1(S^1) & \longrightarrow & \pi_0(S^0) & \longrightarrow & \pi_0(S^1)
\end{array}$$

Здесь все вертикальные стрелочки, кроме центральной, индуцированны отображением det и являются изоморфизмами. Из этого следует, что и центральная стрелочка является изоморфизмом, это называется 5-леммой. В силу тривиальности крайних членов последовательностей, в данном случае факт изоморфизма доказать проще, чем в общем случае, сделайте это самостоятельно.

Итак, мы получили, что фундаментальная группа лагранжева грассманиана $\mathcal{L}(n)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, причём её подгруппа индекса 2 является образом фундаментальной группы пространства $\mathrm{U}(n)$. Эта же группа является образом фундаментальной группы ориентированного грассманиана $\mathcal{L}_+(n)$ при проекции двулистного накрытия. Это соответствует тому, что унитарная группа действует на ориентированном грассманиане, поэтому перенос фиксированного лагранжева подпространства петлёй из унитарных матриц сохраняет ориентацию лагранжева подпространства. Нечётным элементам $\pi_1(\mathcal{L}(n))$ соответствуют петли с разными ориентациями лагранжева подпространства в начальный момент времени и конечный.

3.4 Индекс Маслова

Резюмируем результаты этой лекции следующим определением.

Пусть $p : \mathrm{Sp}(2n) \to \mathrm{U}(n)$ – построенная ретракция, тогда $\det_* \circ p_* : \pi_1(\mathrm{Sp}(2n)) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ – изоморфизм и каждой петле γ на группе $\mathrm{Sp}(2n)$ сопоставим целое число $\mu(\gamma) = \det_* \circ p_*([\gamma]) \in \mathbb{Z}$, которое называется индексом Маслова. Это число не зависит от отмеченной точки, так как фундаментальная группа абелева[1]. Аналогично каждой петле γ на грассманиане $\mathcal{L}(n)$ сопоставим целое число $\mu(\gamma)$.

Выполнены следующие свойства:

[1]Фундаментальная группа группы Ли всегда абелева [В.-О., §1.3] и композиция петель гомотопна поточечному произведению петель

- Если γ_1 и γ_2 – две петли на группе $\mathrm{Sp}(2n)$ с общей начальной (и конечной) точкой, то индекс Маслова композиции петель $\mu(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ равен $\mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2)$.

- Если γ_1 и γ_2 – две петли на группе $\mathrm{Sp}(2n)$, то индекс Маслова их поточечного группового умножения $\mu(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ равен $\mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2)$.

- Для симплектического подпространства W пространства V естественно определено вложение $\mathrm{Sp}(W) \subset \mathrm{Sp}(V)$, где подразумевается, что оператор из $\mathrm{Sp}(W)$ действует на дополнении W^ω неподвижно. Тогда индекс маслова петли на $\mathrm{Sp}(W)$ совпадает с индексом Маслова той же петли в большей группе $\mathrm{Sp}(V)$.

- Если индексы Маслова двух петель совпадают, то они гомотопны.

- Индекс Маслова петли
$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}$$
на $\mathrm{Sp}(2)$ равен 1.

- Если $\gamma(t) \in \mathrm{Sp}(2n)$ и $L_0 \in \mathcal{L}(n)$, то $\mu(\gamma \cdot L_0) = 2\mu(\gamma)$.

Список литературы

[Bredon] Bredon G. *Topology and Geometry.* Springer, New York, 1993.

[Pedersen] Pedersen G. *C^*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, London, 1979.

[В.-О.] Винберг Э.Б., Онищик А.Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* Издательство «Наука», Москва, 1988.

[Ф.-Ф.] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии.* Издательство «Наука», Москва, 1989.

4 Симплектоморфизмы и производящие функции

На первой лекции в сюжете про линзы у нас появлялись отображения из плоскости в себя, дифференциал которых был симплектической матрицей. Поговорим о таких отображениях подробнее.

Эта лекция посвящена анализу в $\mathbb{R}^n$. Читателя, не знакомого с исчислением дифференциальных форм и производной Ли, мы отсылаем к книге [ДНФ, §23, 25, 26].

4.1 Начальные определения

Введём в $\mathbb{R}^{2n} = (u^1, \dots, u^{2n}) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ систему координат, мы будем использовать оба обозначения. Симплектической формой мы будем называть дифференциальную 2-форму

$$\omega = dx^1 \wedge dy^1 + \dots + dx^n \wedge dy^n,$$

которая любой паре касательных векторов $v = (v^1, \dots, v^{2n}), w = (w^1, \dots, w^{2n})$ в любой точке сопоставляет число

$$\omega(v, w) = \omega_{ij} v^i w^j, \ (\omega_{ij}) = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь, к примеру, dx^1 обозначает дифференциал координатной функции x^1.

Как и любая дифференциальная 2-форма, ω есть кососимметричная билинейная форма в каждой точке $\mathbb{R}^{2n}$, определённая на парах касательных векторов в этой точке. Касательные пространства к разным точкам $\mathbb{R}^{2n}$ можно отождествить с помощью параллельного переноса и при этом отождествлении значение билинейной формы ω сохраняется, так как коэффициенты в разложении ω при $dx^i \wedge dy^i$ постоянны.

Диффеоморфизм Φ между областями в $\mathbb{R}^{2n}$, сохраняющий ω при отображении обратного образа ($\Phi^*\omega = \omega$), называется симплектоморфизмом. В координатах это значит, что матица Якоби $D\Phi = (\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j})$ симплектическая:

$$(D\Phi)^T \Omega (D\Phi) = \Omega.$$

Во второй лекции обсуждалось, что определитель симплектической матрицы равен 1. Значит, симплектоморфизмы сохраняют объём областей в $\mathbb{R}^{2n}$, что следует из формулы замены переменной под интегралом:

$$\int\limits_{\Phi(V)} du^1 \wedge \dots \wedge du^{2n} = \int\limits_V \det \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} \right) du^1 \wedge \dots \wedge du^{2n} = \int\limits_V du^1 \wedge \dots \wedge du^{2n}.$$

В бескоординатных терминах сохранение объёма можно сформулировать как то, что форма объёма пропорциональна с постоянным ненулевым коэффициентом форме $\omega^{\wedge n}$ и то, что линейный оператор, сохраняющий форму ω, должен сохранять и её внешнюю степень:

$$\omega^{\wedge n} = (-1)^{n(n-1)/2} n! \cdot du^1 \wedge \cdots \wedge du^{2n},\ \Phi^*(\omega^{\wedge n}) = (\Phi^*\omega)^{\wedge n} = \omega^{\wedge n}.$$

4.2 Гамильтонов поток и принцип наименьшего действия

Сейчас мы построим широкий класс симплектоморфизмов $\mathbb{R}^{2n}$.

4.2.1 Определение гамильтонова потока

Гамильтоновым векторным полем X_H, построенным по гладкой функции H, которая определена в области $V \subset \mathbb{R}^{2n}$, называется векторное поле, которое однозначно определено в той же области из равенства

$$i_{X_H}\omega = dH,$$

где i_{X_H} обозначает оператор подстановки вектора в первый аргумент дифференциальной формы, то есть $i_{X_H}\omega = \omega(X_H, \cdot)$ – это дифференциальная 1-форма. Однозначность следует из того, что указанное условие линейно по X_H в каждой точке и матрица соответствующей системы линейных уравнений $\omega_{ij}(X_H)^i = \frac{\partial H}{\partial u^j}$ невырождена. Решение в координатах можно записать так:

$$(X_H)^i = (\omega^{-1})^{ij} \frac{\partial H}{\partial u^j}.$$

И эквивалентно в (x, y)-координатах:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

Пусть теперь функция $H(u, t)$ также зависит от параметра времени t, пробегающего связное подмножество $\mathbb{R}$. Допустим $H(u, t)$ определена на всём $\mathbb{R}^{2n}$ для каждого t и выражение $\sum\limits_{i=1}^{2n} (\frac{\partial H}{\partial u^i})^2$ ограничено числом, не зависящим от u и t. Тогда по теореме о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения для любого (условно начального) момента времени t_0 существует поток Φ^t, такой что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi^t(p) &= X_{H(t)}(\Phi^t(p)) \\ \Phi^{t_0} &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}} \end{aligned}$$

для любой точки $p \in \mathbb{R}^{2n}$ и момента времени t. Этот поток называется гамильтоновым.

Утверждение. *Гамильтонов поток есть семейство симплектоморфизмов.*

Доказательство. Условие $(\Phi^t)^*\omega = \omega$ для любого t можно эквивалентно переписать в дифференциальной форме: $L_{X_{H(t)}}\omega = 0$ для любого t, где L_v – это производная Ли вдоль векторного поля v. Это следует из определения производной Ли.

По цепной формуле Картана для производной Ли дифференциальных форм

$$L_{X_H}\omega = (i_{X_H} \circ d + d \circ i_{X_H})\omega = i_{X_H} d\omega + d(i_{X_H}\omega) = i_{X_H} 0 + d(dH) = 0 + 0,$$

где $d\omega = 0$, так как коэффициенты в разложении ω по базису $\{du^i \wedge du^j\}$ константы, и $d^2 = 0$ для любой дифференциальной формы. $\square$

4.2.2 Принцип наименьшего действия

Сейчас мы сформулируем принцип для гамильтоновых потоков, который нам важен, как мотивирующий пример для определения производящей функции, и с философской точки зрения как переход от решения системы дифференциальных уравнений к нахождению критических точек одной функции на пространстве путей.

На гладком пути $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}$ определим значение функционала действия формулой

$$S(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} y \cdot \dot{x} - H(x, y, t)\; dt,$$

где $a \cdot b$ – это стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, $y = \gamma_y(t)$ и $\dot{x} = \frac{d\gamma_x}{dt}$. Внимание на это действие обратил Гамильтон.

Утверждение. *Гамильтоновы траектории суть критические точки функционала действия на пространстве всех гладких путей $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}$ с фиксированными концами.*

Доказательство. Проварьируем действие по вариации $\delta\gamma$ траектории γ. Для траектории α мы обозначаем $||\alpha|| = \sup\limits_{t \in [t_0, t_1]} \big(|\alpha(t)| + |\ \dot{\alpha}\ (t)|\big)$.

$$\delta S = S(\gamma + \delta\gamma) - S(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta y \cdot \dot{x} + y \cdot \delta\dot{x} - \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial x} \cdot \delta x - \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial y} \cdot \delta y\; dt +$$

$$+ o(||\delta\gamma||) = \int\limits_{t_0}^{t_1} y \cdot \delta\dot{x}\; dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\delta y\ \cdot \left(\dot{x} - \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial y}\right) - \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial x} \cdot \delta x\right)\; dt + o(||\delta\gamma||) =$$

$$= (y\cdot \delta x)\big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{y}\cdot \delta x\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\delta y\ \cdot \left(\dot{x} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}\right) - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}\cdot \delta x\right)\, dt + o(||\delta\gamma||) =$$

$$= y_1\cdot \delta x_1 - y_0\cdot \delta x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta y\ \cdot \left(\dot{x} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}\right) + \delta x\cdot \left(-\ \dot{y} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}\right)\, dt + o(||\delta\gamma||),$$

где $(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$.

Так как концы траектории зафиксированы, то $y_1\cdot\delta x_1 - y_0\cdot \delta x_0 = 0$. Значит, γ – критическая точка функционала действия S, если и только если выражения при δx и δy равны нулю при любом t, то есть γ – траектория гамильтонова потока. □

Тем самым поиск решений гамильтоновых дифференциальных уравнений может быть сведён к поиску критических точек функционала S на пространстве путей. С одной стороны, искать критические точки одной функции проще, чем решать систему нелинейных уравнений, но с другой стороны пространство, на котором определена такая функция, сложнее исходного пространства.

Теперь предположим, что пара (x_0, x_1) задаёт однозначно определённые координаты на пространстве траекторий гамильтонова потока, то есть что y_0 и y_1 выражаются как функции от x_0 и x_1.

Пример. Любая точка (x_0, y_0) и её образ $(x_1, y_1) = (-y_0, x_0)$ под действием симплектического оператора $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ однозначно определены по $(x_0, x_1) = (x_0, -y_0)$.

Упражнение. Точка (x_0, y_0) и её образ (x_1, y_1) под действием симплектического оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ однозначно определены по (x_0, x_1), если и только если $\det B \neq 0$.

Тогда ограничение функционала $S(\gamma)$ на гамильтоновы траектории становится функцией $S(x_0, x_1)$. Из вычислений для вариации δS в случае гамильтоновой траектории γ следует, что $S(x_0 + \delta x_0, x_1 + \delta x_1) = S(x_0, x_1) + y_1(x_0, x_1)\cdot \delta x_1 - y_0(x_0, x_1)\cdot$ $\cdot\, \delta x_0 + o(|\delta x_1| + |\delta x_0|)$, то есть

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{\partial S}{\partial x_0}(x_0, x_1) \\ y_1 &= \frac{\partial S}{\partial x_1}(x_0, x_1). \end{aligned}$$

4.3 Производящие функции

4.3.1 (x_0, x_1)-производящие функции

Существование такой функции $S(x_0, x_1)$ свойственно симплектоморфизмам вообще, а не только гамильтоновым потокам:

Утверждение. *Пусть Φ – диффеоморфизм односвязных областей в $\mathbb{R}^{2n}$, причём y_0 и y_1 суть функции от x_0 и x_1, где $(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0)$. Тогда найдётся такая функция $S(x_0, x_1)$, что $y_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0}$ и $y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}$, если и только если Φ – симплектоморфизм.*

Доказательство. Обозначим диффеоморфизмы областей в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\varphi_0 : (x_0, x_1) \mapsto (x_0, y_0(x_0, x_1)),\ \varphi_1 : (x_0, x_1) \mapsto (x_1, y_1(x_0, x_1)).$$

Тогда $\Phi \circ \varphi_0 = \varphi_1$.

Введём 1-форму $\lambda = y \cdot dx$ в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда $d\lambda = -\omega$.

Вычислим обратные образы формы λ при отображениях φ_0 и φ_1:

$$\varphi_0^*\lambda = \varphi_0^*(y_0 dx_0) = y_0(x_0, x_1)dx_0,$$
$$\varphi_1^*\lambda = \varphi_1^*(y_1 dx_1) = y_1(x_0, x_1)dx_1.$$

Условие на функцию $S(x_0, x_1)$, что $y_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0}$ и $y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}$, равносильно условию $dS = \varphi_1^*\lambda - \varphi_0^*\lambda$. Существование такой функции равносильно $d(\varphi_1^*\lambda - \varphi_0^*\lambda) = 0$ — в одну сторону это следует из соотношения $d^2 = 0$, а в другую – по лемме Пуанкаре для односвязной области. Далее

$$d\varphi_0^*\lambda = d\varphi_1^*\lambda \iff \varphi_0^* d\lambda = \varphi_1^* d\lambda \iff d\lambda = (\varphi_0^*)^{-1}\varphi_1^* d\lambda = \Phi^* d\lambda.$$

Последнее в точности означает, что Φ – симплектоморфизм, так как $\omega = -d\lambda$.

$\square$

Замечание. В одну сторону доказательство утвреждения не использовало односвязность области. Односвязность нужна была только для леммы Пуанкаре.

Упражнение. Даны 1-форма α в односвязной области V в $\mathbb{R}^n$, дифференциал которой равен 0, и точка $p_0 \in V$. Определим функцию

$$f(p) = \int\limits_{\gamma} \alpha(\dot\gamma)\ dt,$$

где $\gamma(t)$ – путь с началом в p_0 и концом в p. Докажите, что значение функции f в точке p не зависит от выбора пути от p_0 до p и $df = \alpha$.

Указание. Воспользуйтесь формулой Стокса.

Упражнение. Докажите, что если производная Ли симплектической формы ω вдоль векторного поля в односвязной области равна нулю, то это векторное поле гамильтоново.

Функцию S, существование которой мы устанавливали в утверждении, будем называть (x_0, x_1)-производящей функцией или просто производящей функцией.

Пример. Пусть $\gamma(s)$ – гладкая кривая на плоскости с натуральным параметром, ограничивающая выпуклую область. На пространстве лучей с началом на кривой и входящих внутрь области введём координаты $(s, \cos\theta)$, где s – параметр начала луча, а θ – угол между вектором скорости кривой и направлением луча (ориентация угла не имеет значения, потому что мы берём cos).

Каждый такой луч пересекает кривую γ второй раз и по закону отражения мы можем построить во второй точке пересечения другой луч. Сопоставление первому лучу второго называется бильярдным отображением $(s_0, \cos\theta_0) \mapsto (s_1, \cos\theta_1)$. Очевидно, что θ_0 и θ_1 суть функции от s_0 и s_1 и

$$\frac{\partial}{\partial s_0}|\gamma(s_0) - \gamma(s_1)| = -\cos\theta_0, \ \frac{\partial}{\partial s_1}|\gamma(s_0) - \gamma(s_1)| = \cos\theta_1.$$

То есть расстояние между начальной и конечной точкой есть производящая функция, и это доказывает симплектичность бильярдного отображения.

Упражнение. Найдите симплектический оператор с производящей функцией $S = x_0 \cdot x_1$.

Упражнение. Для симплектического оператора, заданного блочной матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, у которой $\det B \neq 0$, найдите (x_0, x_1)-производящую функцию.

4.3.2 (y_0, x_1)-производящие функции

Применив симплектоморфизм $(x, y) \mapsto (-y, x)$ в прообразе, мы получаем полный аналог утверждения выше:

Утверждение. *Пусть Φ – диффеоморфизм односвязных областей в $\mathbb{R}^{2n}$, причём x_0 и y_1 суть функции от y_0 и x_1, где $(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0)$. Тогда найдётся такая функция $W(y_0, x_1)$, что $x_0 = \frac{\partial W}{\partial y_0}$ и $y_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}$, если и только если Φ – симплектоморфизм.*

Упражнение. Пусть симплектоморфизм допускает разные производящие функции $S(x_0, x_1)$ и $W(y_0, x_1)$. Докажите, что $S(x_0, x_1) = W(y_0(x_0, x_1), x_1) - x_0 \cdot y_0(x_0, x_1) + C$, где C – константа.

(y_0, x_1)-производящие функции оказываются гораздо полезнее, потому что они есть у симплектоморфизмов, достаточно близких к тождественному, но об этом в следующий раз.

Упражнение. Точка (x_0, y_0) и её образ (x_1, y_1) под действием симплектического оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ однозначно определены по (y_0, x_1), если и только если $\det A \neq 0$.

Список литературы

[ДНФ] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: Методы и приложения.* Издательство «Наука», Москва, 1986.

5 Симплектоморфизмы и гипотеза Арнольда

Мы по-прежнему предполагаем, что пространство $\mathbb{R}^{2n} = (x, y)$ снабжено стандартной симплектической формой $\omega = dx^1 \wedge dy^1 + \dots + dx^n \wedge dy^n$.

5.1 (y_0, x_1)-производящие функции: продолжение

Покажем, что симплектоморфизмы, близкие к тождественным, могут быть глобально заданы производящей функцией.

Утверждение. *Пусть дан диффеоморфизм* $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *и* $||D\Phi - \mathrm{id}|| < \varepsilon < 1$, *где* $||A|| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$ *есть операторная норма. Выберем координаты в* $\mathbb{R}^{2n}$ (x_0, y_0) *и* (x_1, y_1) *так, что* $\Phi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. *Тогда* x_0 *есть функция от* y_0 *и* x_1.

Доказательство. Уравнение $x_1 = \Phi_x(x_0, y_0) = x_0 + \Phi_x(x_0, y_0) - x_0$ перепишем в виде

$$x_0 = x_1 - (\Phi_x - \mathrm{id})(x_0, y_0).$$

При любых (y_0, x_1) отображение $z \mapsto x_1 - (\Phi_x - \mathrm{id})(z, y_0)$ сжимающее с коэффициентом $\varepsilon < 1$, а значит, имеет единственную неподвижную точку $x_0(y_0, x_1)$. Эта функция гладкая по теореме о неявной функции для уравнения $x_1 = \Phi_x(x_0, y_0)$, где $\det \partial\Phi_x/\partial x_0 \neq 0$, так как $||D\Phi_x - \mathrm{id}|| < 1$. $\square$

Если x_0 есть функция от y_0 и x_1, то $y_1 = \Phi_y(x_0(y_0, x_1), y_0)$ тоже.

Из прошлой лекции следует, что диффеоморфизм Φ из этого утверждения – симплектоморфизм, если и только если найдётся такая функция $W(y_0, x_1)$, что $x_0 = \partial W/\partial y_0$ и $y_1 = \partial W/\partial x_1$. Симплектоморфизм может быть записан в виде:

$$\Phi : (\frac{\partial W}{\partial y_0}, y_0) \mapsto (x_1, \frac{\partial W}{\partial x_1}). \tag{3}$$

5.2 Примеры и упражнения

Пример: производящая функция гамильтонова симплектоморфизма. Пусть гамильтониан $H(x, y, t)$ зависит от времени и симплектоморфизм, полученный интегрированием уравнений Гамильтона за время от t_0 до t_1, имеет производящую функцию $W(y_0, x_1)$ (например, это достигается если промежуток времени $[t_0, t_1]$ достаточно мал). Тогда

$$W(y_0, x_1) = x_0(y_0, x_1) \cdot y_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} y \cdot \dot{x} - H(x, y, t)\ dt + C,$$

где $(x(t), y(t))$ – гамильтонова траектория с $y(t_0) = y_0$ и $x(t_1) = x_1$, C – константа.

Действительно, на прошлой лекции мы показали, что для любого касательного вектора v

$$\frac{\partial}{\partial v}\int\limits_{t_0}^{t_1} y\cdot\dot{x} - H(x,y,t)\ dt = y_1\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v} - y_0\cdot\frac{\partial x_0}{\partial v}.$$

Значит,

$$\frac{\partial W}{\partial y_0} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial y_0}\cdot y_0 + x_0\right) - y_0\cdot\frac{\partial x_0}{\partial y_0} = x_0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial x_0}{\partial x_1}\cdot y_0 + \left(y_1 - y_0\cdot\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\right) = y_1,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Для симплектоморфизма плоскости, допускающего производящую функцию, либо во всех точках верно $\frac{\partial x_0}{\partial x_1} > 0$, либо $\frac{\partial x_0}{\partial x_1} < 0$. Первый случай можно условно называть близким к тождественному симплектоморфизму, а второй – близким к $-\mathrm{id}$. А условие несуществования производящей функции можно соотнести с достаточной степенью искревления симплектоморфизмом.

Упражнение. Докажите, что гамильтонов поток на плоскости для $H = e^{x^2+y^2}$ за время 1 даёт симплектоморфизм, который не раскладывается в композицию симплектоморфизмов, допускающих производящую функцию.

Уместен вопрос, для каких функций $W(y_0, x_1)$ отношение 3 есть диффеоморфизм (а значит, симплектоморфизм)? Если научиться на него отвечать, это позволит строить примеры симплектоморфизмов. Например, так как гладкая функция $x_0(y_0, x_1)$ (если она существует) определяется из уравнения $x_1 = \Phi(x_0, y_0)$, то $\det\frac{\partial x_0}{\partial x_1} \neq 0$. Значит, для любой производящей функции выполнено $\det\frac{\partial^2 W}{\partial y_0 \partial x_1} \neq 0$. Этого условия достаточно, чтобы определить локальные симплектоморфизмы:

Упражнение. Пусть $\det\frac{\partial^2 W}{\partial y_0 \partial x_1} \neq 0$. Тогда найдутся такие окрестности $U(y_0)$ и $U(x_1)$, что $(\frac{\partial W}{\partial y_0}, y_0) \mapsto (x_1, \frac{\partial W}{\partial x_1})$ есть симплектоморфизм $\frac{\partial W}{\partial y_0}(U(y_0)) \times U(y_0)$ и $U(x_1) \times \frac{\partial W}{\partial x_1}(U(x_1))$.

Для глобального диффеоморфизма нужно более сильное условие. Например, как в следующем упражнении.

Упражнение. Пусть функция $W(y_0, x_1)$ определена в выпуклой области D в $\mathbb{R}^{2n}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y_0 \partial x_1} > 0$ ($A > 0$, если $v\cdot Av > 0$ для всех $v \neq 0$). Тогда $(\frac{\partial W}{\partial y_0}, y_0) \mapsto (x_1, \frac{\partial W}{\partial x_1})$ есть симплектоморфизм между образами области D при диффеоморфизмах $(y_0, x_1) \mapsto (\frac{\partial W}{\partial y_0}, y_0)$ и $(y_0, x_1) \mapsto (x_1, \frac{\partial W}{\partial x_1})$.

С помощью предыдущего упражнения можно показать, что, наряду с группой диффеоморфизмов, группа симплектоморфизмов локально связна:

Упражнение. Пусть симплектоморфизм Φ определён на $\mathbb{R}^{2n}$ и задан производящей функцией $W(y_0, x_1)$ и $||D\Phi - \mathrm{id}|| < \varepsilon < 1$. Тогда семейство производящих функций $(1-t)W(y_0, x_1) + ty_0 \cdot x_1$ при $t \in [0, 2]$ задаёт поток симплектоморфизмов, который включает в себя тождественный симплектоморфизм.

По модулю предыдущего следующее является упражнением на производную Ли.

Упражнение. Пусть дан симплектоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ и $||D\Phi - \mathrm{id}|| < \varepsilon < 1$. Тогда Φ – гамильтонов.

Пример. Функция $W(y_0, x_1) = e^{y_0} x_1$ на плоскости определяет диффеоморфизм $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 e^{-y_0}, e^{y_0})$ из плоскости в полуплоскость $y_1 > 0$, который сохраняет площадь. В образе в окрестности оси Ox_1 сжатие в вертикальном направлении компенсируется растяжением в горизонтальном.

Упражнение. Квадратичная форма $W(y_0, x_1)$ есть производящая функция для симплектоморфизма, если и только если симплектоморфизм линеен и $\det \frac{\partial^2 W}{\partial y_0 \partial x_1} \neq 0$.

Упражнение. Пусть $W(y_0, x_1)$ – производящая функция симплектоморфизма Φ, а $\widetilde{W}(y_1, x_0)$ – производящая функция симплектоморфизма Φ^{-1}. Тогда

$$x_0(y_0, x_1) \cdot y_0 + x_1 \cdot y_1(y_0, x_1) = \widetilde{W}(y_1(y_0, x_1), x_0(y_0, x_1)) + W(y_0, x_1).$$

Пример. Рассмотрим симплектоморфизм $\mathbb{R}^{2n}$ вида $(x_0, y_0) \mapsto (x_0, f(x_0, y_0))$. Для его производящей функции выполнено

$$\frac{\partial W}{\partial y_0}(y_0, x_0) = x_0, \quad \frac{\partial W}{\partial x_0}(y_0, x_0) = f(x_0, y_0),$$

откуда из первого уравнения $W = x_0 \cdot y_0 + g(x_0)$ и $f = y_0 + \nabla_{x_0} g$.

На плоскости такой симплектоморфизм есть сдвиг каждой вертикальной прямой вдоль себя, гладко зависящий от x_0. В большей размерности сдвиг нельзя выбирать произвольно, и вектор сдвига должен быть градиентом некоторой функции.

Пусть H – функция на плоскости. Тогда неподвижные точки гамильтонова потока относительно функции H суть её критические точки, а траектории потока суть открытые дуги или замкнутые кривые, которые являются компонентами связности линий уровня функции H в дополнении к множеству критических точек.

Пример: седло. Оператор, заданный матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$, симплектический. На плоскости семейство операторов $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ задают гамильтонов поток функции $H(x,y) = xy$. Начало координат есть единственная неподвижная точка относительно потока, причём её окрестность сжимается по вертикали и растягивается во столько же раз по горизонтали, сохраняя площадь.

Пример: кратное седло. Возьмём функцию $H = \prod_{i=1}^{k}(a_i x + b_i y)$, где $k > 1$ и вектора (a_i, b_i) попарно неколлинеарны. Нули функции H – это k прямых, пересекающихся в начале координат. Начало координат – единственная неподвижная точка потока. Растягивающиеся и сжимающиеся лучи, лежащие на прямых и выпущенные из начала координат, чередуются.

Пример: фокус. На плоскости семейство операторов $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ задают гамильтонов поток функции $H(x,y) = x^2 + y^2$. Начало координат – единственная неподвижная точка. Остальные орбиты – концентрические окружности.

5.3 Неподвижные точки симплектоморфизмов

Как мы видим, динамика стационарного гамильтонова потока на плоскости сводится к устройству линий уровня гамильтониана. Оказывается, что связь с функциями поддерживается и в нестационарном случае. Мы обсудим, что гамильтонов симплектоморфизм на двумерном торе имеет не меньше неподвижных точек, чем некоторая функция на торе имеет критических точек. Более общее утверждение, распространяющееся на более общие симплектические пространства (многообразия), называется гипотезой Арнольда.

Начнём с простого наблюдения. Пусть Φ – симплектоморфизм $\mathbb{R}^{2n}$ с производящей функцией $W(y_0, x_1)$. Тогда неподвижные точки симплектоморфизма Φ суть образ критических точек функции $W - y_0 \cdot x_1$ при диффеоморфизме $(y_0, x_1) \mapsto (x_0(y_0, x_1), y_0)$. Это очевидно по определению:

$$\frac{\partial}{\partial y_0}(W - y_0 \cdot x_1) = 0 \iff x_1 = \frac{\partial W}{\partial y_0} = x_0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(W - y_0 \cdot x_1) = 0 \iff y_0 = \frac{\partial W}{\partial x_1} = y_1.$$

Далее мы отождествляем тор T^{2n} с $\mathbb{R}^{2n}$ по модулю целочисленных сдвигов, то есть с фактор-группой $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$.

Пример. Рассмотрим симплектоморфизм $\mathbb{R}^{2n}$, заданный параллельным переносом на постоянный не целочисленный вектор. Такой симплектоморфизм спускается до симплектоморфизма тора и не имеет неподвижных точек. Производящая функция не спускается до функции на торе, то есть не периодическая.

Чтобы исключить параллельный перенос тора, мы будем предполагать, что симплектоморфизм гамильтонов. Следующее утверждение доказывает гипотезу Арнольда для гамильтоновых симплектоморфизмов тора, имеющих производящую функцию.

Утверждение. *Пусть гамильтонов симплектоморфизм тора имеет производящую функцию $W(y_0, x_1)$. Тогда функция $W(y_0, x_1) - y_0 \cdot x_1$ периодическая.*

Доказательство. В начале подраздела 5.2 мы дали выражение для функции $W(y_0, x_1)$. Пусть $(k, l) \in \mathbb{Z}^{2n}$, тогда

$$(W(y_0 + k, x_1 + l) - (y_0 + k) \cdot (x_1 + l)) - (W(y_0, x_1) - y_0 \cdot x_1) =$$
$$= (x_0 + l) \cdot (y_0 + k) - x_0 \cdot y_0 + \int_{t_0}^{t_1} (y + k) \cdot (\dot{x + l}) - y \cdot \dot{x} - (H(x + l, y + k, t) - H(x, y, t))\, dt -$$
$$- y_0 \cdot l - k \cdot x_1 - k \cdot l = x_0 \cdot k + \int_{t_0}^{t_1} k \cdot \dot{x}\ \ dt - k \cdot x_1 = x_0 \cdot k + k \cdot x\Big|_{t_0}^{t_1} - k \cdot x_1 = 0.$$

□

Для общих гамильтоновых симплектоморфизмов мы построим функцию, у которой критических точек будет столько же, сколько неподвижных точек у симплектоморфизма, но эта функция будет определена не на торе, а на более сложном пространстве. А именно, достаточно мелко разобьём временной интервал $[0, 1] \ni 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2N} = 1$, так чтобы для симплектоморфизмов $\Phi_i = \Phi_{t_i}^{t_{i+1}}$ (полученных интегрированием гамильтонова векторного поля за время от t_i до t_{i+1}) существовала производящая функция $W_i(y_i, x_{i+1})$ при чётном i и производящая функция $W_i(x_i, y_{i+1})$ при нечётном i. По определению производящей функции

$$\frac{\partial W_{2j}}{\partial y_{2j}}(y_{2j}, x_{2j+1}) = x_{2j}, \frac{\partial W_{2j}}{\partial x_{2j+1}}(y_{2j}, x_{2j+1}) = y_{2j+1} \iff \Phi_{2j}(x_{2j}, y_{2j}) = (x_{2j+1}, y_{2j+1}),$$
$$\frac{\partial W_{2j-1}}{\partial y_{2j}}(x_{2j-1}, y_{2j}) = x_{2j}, \frac{\partial W_{2j-1}}{\partial x_{2j-1}}(x_{2j-1}, y_{2j}) = y_{2j-1} \iff \Phi_{2j-1}(x_{2j-1}, y_{2j-1}) = (x_{2j}, y_{2j}).$$

Неподвижные точки симплектоморфизма Φ_0^1 определяют цепочку

$$(x_0, y_0) \overset{\Phi_0}{\mapsto} (x_1, y_1) \overset{\Phi_1}{\mapsto} \cdots \overset{\Phi_{2N-2}}{\mapsto} (x_{2N-1}, y_{2N-1}) \overset{\Phi_{2N-1}}{\mapsto} (x_0, y_0).$$

Такие цепочки находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками функции

$$W(y_0, x_1, \dots, y_{2N-2}, x_{2N-1}) = W_0(y_0, x_1) - W_1(x_1, y_2) + \dots - W_{2N-1}(x_{2N-1}, y_0),$$

где из критической точки $(y_0, x_1, \dots, y_{2N-2}, x_{2N-1})$ однозначно восстанавливается неподвижная точка $(\frac{\partial W_0}{\partial y_0}(y_0, x_1), y_0)$ симплектоморфизма Φ_0^1.

На количество критических точек произвольной функции на $\mathbb{R}^{2N}$ нет никаких ограничений. Однако если выбрать немного другие координаты, то функция W становится периодичной по некоторым переменным. А именно, напомним, что функции $W_{2j}(y_{2j}, x_{2j+1}) - y_{2j} \cdot x_{2j+1}$ и $W_{2j-1}(x_{2j-1}, y_{2j}) - x_{2j-1} \cdot y_{2j}$ периодические, тогда

$$W = y_0 \cdot x_1 - x_1 \cdot y_2 + \dots + y_{2N-2} \cdot x_{2N-1} - x_{2N-1} \cdot y_0 + \widetilde{W}(y_0, x_1, \dots, y_{2N-2}, x_{2N-1}),$$

где $\widetilde{W}$ – периодическая. Неограниченная часть в этом выражении есть квадратичная форма. Приведём её к стандартному виду заменой базиса.

$$\begin{aligned}
&y_0 \cdot x_1 - x_1 \cdot y_2 + \dots + y_{2N-2} \cdot x_{2N-1} - x_{2N-1} \cdot y_0 = \\
&= y_0 \cdot (x_1 - x_{2N-1}) + y_2 \cdot (x_3 - x_1) + \dots + y_{2N-2} \cdot (x_{2N-1} - x_{2N-3}) = \\
&= -y_0 \cdot (x'_3 + x'_5 + \dots + x'_{2N-1}) + y_2 \cdot x'_3 + \dots + y_{2N-4} \cdot x'_{2N-3} + y_{2N-2} \cdot x'_{2N-1} = \\
&= (y_2 - y_0) \cdot x'_3 + (y_4 - y_0) \cdot x'_5 + \dots + (y_{2N-2} - y_0) \cdot x'_{2N-1} = \\
&= y'_2 \cdot x'_3 + y'_4 \cdot x'_5 + \dots + y'_{2N-2} \cdot x'_{2N-1}.
\end{aligned}$$

Видно, что ядро квадратичной формы получилось двумерным. Действительно, вектора $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ и $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ в исходных координатах порождают ядро. В результате замены координат

$$\begin{aligned}
y_0 = y_0,\ x_1 = x_1, \\
y'_2 = y_2 - y_0,\ \dots,\ y'_{2N-2} = y_{2N-2} - y_0, \\
x'_3 = x_3 - x_1,\ \dots,\ x'_{2N-1} = x_{2N-1} - x_{2N-3}
\end{aligned}$$

функция $\widetilde{W}$ осталась периодичной, а функция

$$W = y'_2 \cdot x'_3 + y'_4 \cdot x'_5 + \dots + y'_{2N-2} \cdot x'_{2N-1} + \widetilde{W}(y_0, x_1, y'_2, x'_3, \dots, y'_{2N-2}, x'_{2N-1})$$

стала периодичной по переменным y_0 и x_1. Тем самым мы получили функцию на $T^{2n} \times \mathbb{R}^{2n(N-1)}$. Число её критических точек мы будем оценивать снизу в следующей лекции.