

# Двойственность в алгебраической топологии

В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, Н.Ю. Ероховец

Часть I

## Осенний семестр. Двойственность в дифференциальной и комбинаторной топологии

### 1 Лекция 1. Комбинаторная двойственность Александра [1, 4].

#### 1.1 Симплициальные комплексы: основные понятия

Абстрактный и геометрический симплициальный комплекс, линк и звезда симплекса. Двойственный комплекс

$$\widehat{K} = \{\sigma \subset [m] : [m] \setminus \sigma \notin K\}$$

#### 1.2 Бариецентрическое подразбиение и комбинаторная окрестность

Доказательство того, что для  $K \neq \Delta^{m-1}$

$$(\widehat{K})' \simeq (\partial\Delta^{m-1})' \setminus \overset{\circ}{U}_{(\partial\Delta^{m-1})'}(K').$$

**Задача 1.** Доказать гомотопическую эквивалентность для  $K \neq \Delta^{m-1}$ :

$$(\partial\Delta^{m-1})' \setminus \overset{\circ}{U}_{(\partial\Delta^{m-1})'}(K') \sim (\partial\Delta^{m-1})' \setminus K'.$$

Возможно, будет полезно бариецентрическое вложение  $K' \subset I^m$ :

$$v_\sigma \rightarrow (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \varepsilon_i = \begin{cases} 0, & i \in \sigma; \\ 1, & i \notin \sigma \end{cases} .$$

### 1.3 Теорема двойственности

Для  $K \neq \Delta^{m-1}$

$$\tilde{H}_i(K) \simeq \tilde{H}^{m-3-i}(\widehat{K}).$$

**Задача 2.** Доказать, что для  $K \neq \Delta^{m-1}$  и симплекса  $\sigma \in \widehat{K}$  выполнено

$$\tilde{H}_i(K_{\hat{\sigma}}) \simeq \tilde{H}^{m-3-i-|\sigma|}(\text{link}_{\widehat{K}}\sigma),$$

где  $\hat{\sigma} = [m] \setminus \sigma$  и  $K_{\omega}$  – полный подкомплекс, индуцированный на множество  $\omega \subset [m]$ .

**Задача 3.** Пусть  $C$  – клеточный подкомплекс в границе выпуклого  $n$ -многогранника  $P$ . Определим двойственный комплекс  $C^*$  в границе двойственного многогранника  $P^*$  как  $G \notin C \Leftrightarrow G^{\Delta} \in C^*$ , где для  $i$ -мерной грани  $G$  многогранника  $P$  через  $G^{\Delta}$  обозначена соответствующая ей  $(n-1-i)$ -мерная грань двойственного многогранника  $P^*$ . Доказать, что

$$\tilde{H}_i(C) \simeq \tilde{H}^{n-2-i}(\widehat{C}).$$

## 2 Лекция 2. Основные понятия алгебраической топологии.

### 2.1 Симплициальные гомологии и когомологии.

Абстрактный симплициальный комплекс. Геометрический симплициальный комплекс. Теорема Понтрягина: любой абстрактный симплициальный комплекс размерности  $n$  можно реализовать в  $\mathbb{R}^{2n}$  (см. книгу Понтрягина).

Ориентированный  $q$ -мерный симплекс  $\sigma: I = \{i_1, \dots, i_{q+1}\}$  + класс эквивалентности упорядочиваний множества  $I$ , где два упорядочивания эквивалентны, если отличаются на чётную перестановку.

$$[235] \sim [532] \sim [352] \not\sim [325]$$

$[I]$  – класс эквивалентности упорядочиваний.

$\mathbb{K}$  – основное кольцо с единицей (обычно  $\mathbb{Z}$  или поле).

Определим  $C_q(K, \mathbb{K})$  – свободный  $\mathbb{K}$ -модуль с базисом из ориентированных симплексов/ соотношения  $\sigma + \bar{\sigma} = 0$ , где  $\bar{\sigma}$  – симплекс с противоположной ориентацией.

$$\text{rk } C_q(K, \mathbb{K}) = f_q(K) - \text{число } q\text{-мерных симплексов, } C_q(K, \mathbb{K}) = 0 \text{ при } q < 0.$$

Граничное отображение

$$\partial_q C_q(K, \mathbb{K}) \rightarrow C_{q-1}(K, \mathbb{K}): \partial_q [i_1, \dots, i_{q+1}] = \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j-1} [i_1, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_{q+1}]$$

**Упражнение 1.**  $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ .

$$C_*(K, \mathbb{K}) = \{C_q(K, \mathbb{K}), \partial_q\}$$

$$H_q(K, \mathbb{K}) = \text{Ker} [\partial_q: C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)] / \text{Im} [\partial_{q+1}: C_{q+1}(K) \rightarrow C_q(K)]$$

$q$ -ая группа симплициальных гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{K}$ .

Эйлерова характеристика

$$\chi(K) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{rk} H_q(K, \mathbb{K})$$

## Упражнение 2.

$$\chi(K) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{rk} C_q(K, \mathbb{K}) = f_0 - f_1 + f_2 - \dots$$

Как следствие,  $\chi(K)$  не зависит от  $\mathbb{K}$ .

**Определение 2.1.**  $K$  называется *триангуляцией* (симплициальным разбиением) топологического пространства  $X$ , если  $|K| \simeq X$  (гомеоморфно).

**Упражнение 3.** Граница симплекса  $\partial \Delta^n$  – триангуляция сферы  $S^{n-1}$ , где  $\Delta^n = 2^{[n+1]}$  – все подмножества в  $[n+1]$ . Найдите  $H_q(\partial \Delta^{n+1}, \mathbb{Z})$ .

Для  $n = 2$  есть негрань  $[123]$ . Её граница состоит из граней:  $\langle \partial_2[123] \rangle = [23] - [13] + [12]$  – образующая в группе 1-мерных гомологий.

**Упражнение 4.** Рассмотрим триангуляции тора: стороны на 3 части, квадраты побочной диагональю на две части.  $(f_0, f_1, f_2) = (9, 27, 18)$ . Также можно нарисовать минимальную триангуляцию, имеющую только 7 вершин,  $(f_0, f_1, f_2) = (7, 21, 14)$ . Построить триангуляцию и доказать, что она минимальная по числу вершин.  $\chi(T^2) = 0$ .

**Упражнение 5.** Граница икосаэдра даёт триангуляцию проективной плоскости при факторизации.  $(f_0, f_2, f_2) = (6, 15, 10)$ . Посчитать гомологии  $H_*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{K})$  для  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}$ .

Бывают «полусимплициальные» разбиения (один из вариантов представлен в [3]). Это снижает число вершин. Окружность можно триангулировать с одним или двумя 1-мерными симплексами. Тор можно разбить на два треугольника (при этом вершина получается одна). Тогда

$$H_0(T^2) = \mathbb{Z}; \quad H_1(T^2) = \mathbb{Z}^2; \quad H_2(T^2) = \mathbb{Z}.$$

**Упражнение 6.** Аналогично для бутылки Клейна.

Если учитывать  $\emptyset \in K$ , то естественно считать, что  $\dim \emptyset = -1$ .

$$\tilde{C}_{-1}(K) = \mathbb{Z}\langle[\emptyset]\rangle \simeq \mathbb{Z}, \quad \partial_0[i] = [\emptyset]$$

Получается аугментированный комплекс. Его гомологии обозначаются  $\tilde{H}_i(K)$ . При этом если  $K \neq \emptyset$ , то  $H_i(K) = \tilde{H}_i(K)$ , если  $i > 0$ , и  $H_0(K) = \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$ . Также  $\tilde{H}^{-1}(\emptyset, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ .  
Когомологии.

$$C^q(K, \mathbb{K}) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(C_q(K, \mathbb{K}), \mathbb{K})$$

Возникает коцепной комплекс. Состоит из групп и гомоморфизмов  $d_q$ , двойственных к  $\partial_{q+1}$ .

$$d_q: C^q(K, \mathbb{K}) \rightarrow C^{q+1}(K, \mathbb{K}), d_q = \partial_{q+1}^*$$

В книге Дольда есть знак, так что  $\langle d_q \alpha, [I] \rangle = (-1)^q \langle \alpha, \partial_{q+1}[I] \rangle$ ,  $\alpha \in C^q(K, \mathbb{K})$ ,  $[I] \in C_{q+1}(K, \mathbb{K})$ .

$d_q$  – кограничное отображение (или коцепной дифференциал).

$C^q(K, \mathbb{K})$  – свободный  $\mathbb{K}$ -модуль с базисом  $\alpha_I: \langle \alpha_I, [J] \rangle = \delta_{I,J}$ , если  $J \neq [\bar{I}]$ .

На базисе имеем:

$$d\alpha_I = \sum_{j \in [m] \setminus I: j \cup I \in K} (-1)^{l(j,I)} \alpha_{j \cup I},$$

где  $l(j, I) = \#\{i \in I: i < j\}$ .

Группа когомологий  $H^q(K, \mathbb{K}) = \text{Ker } d_q / \text{Im } d_{q-1}$ . Также рассматривается аугментированный комплекс и приведённые когомологии.

Симплициальные гомологии и когомологии – жёсткая конструкция. Чтобы посчитать гомологии пространства, нужно его триангулировать. Однако триангуляций много. Их можно переводить одну в другую про помощи операций. Например, звёздные подразбиения. Есть теорема Александра, которая примерно говорит, что применяя звёздные подразбиения и обратные к ним операции, можно получить из двух триангуляций одну и ту же. Гомеоморфизмы, которые получаются измельчениями триангуляций, – кусочно-линейные гомеоморфизмы. В общем случае у двух триангуляций не всегда есть общее измельчение.

Другой способ – сингулярные гомологии.

## 2.2 Сингулярные гомологии и когомологии

Сразу для топологических пространств.

Пусть  $X$  – топологическое пространство. Непрерывные отображения из стандартного симплекса  $\Delta^q$  (с фиксированным порядком вершин) – сингулярный симплекс («сингулярный» значит, что может иметь любые особенности).

$C_q(X, \mathbb{K})$  – свободный  $\mathbb{K}$ -модуль, порождённый всеми  $q$ -мерными сингулярными симплексами. Огромная группа. Дальше определяется ограничение на грань.

$$\partial_q f = \sum (-1)^{i-1} f|_{i\text{-ая грань}}.$$

### 3 Лекция 3. Сингулярные гомологии и когомологии

$X$  – топологическое пространство,  $\Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$  – стандартный  $n$ -симплекс. Непрерывное отображение  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  называется *сингулярным симплексом*.

$C_n(X) = \left\{ \sum_{i=1}^N k_i \sigma_i, k_i \in \mathbb{Z} \right\}$  – свободная абелева группа, порождённая сингулярными симплексами в  $X$ .

$\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ ,  $\partial_n \sigma = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}$ , где каждая грань отождествляется с симплексом  $\Delta^{n-1}$  за счёт порядка вершин.

$$\partial = \partial_n, \partial_n \partial_{n+1} = 0, \partial^2 = 0.$$

$H_n(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$  – группа сингулярных гомологий пространства  $X$ .

**Утверждение 3.1.** Если  $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$ , то  $H_n(X) = \oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$ .

Аугментированный комплекс:  $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon(\sum_i k_i \sigma_i) = \sum_i k_i$ .  $\sigma_i: \Delta^0 \rightarrow X$ .

$$H_0(X) \simeq \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

**Утверждение 3.2.** Если  $X$  линейно связно, то  $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ ,  $\widetilde{H}_0(X) = \mathbb{Z}$ .

#### Аксиома 1. Гомологии точки

**Утверждение 3.3** (Гомологии точки). Если  $X = pt$ , то  $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$

#### Аксиома 2. Гомотопическая инвариантность.

Отображение пространств  $f: X \rightarrow Y$  индуцирует отображение групп гомологий  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ .  $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ ,  $(\sigma: \Delta^n \rightarrow X) \rightarrow (f_\#(\sigma) = f \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow Y)$ . Тогда  $f_\# \partial = \partial f_\#$ , то есть  $f_\#: (C_*(X), \partial) \rightarrow (C_*(Y), \partial)$  – отображение цепных комплексов.

**Утверждение 3.4.** Отображение  $f_\#$  индуцирует гомоморфизм  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ , причём  $(fg)_* = f_* g_*$ .

Вывод:  $H_n: \text{Top} \rightarrow \text{Gr}$  – (ковариантный) функтор из категории топологических пространств в категорию абелевых групп.

**Следствие 3.1.** Если  $X$  и  $Y$  гомеоморфны, то их группы гомологий изоморфны.

Более общее утверждение.

**Теорема 3.1** (гомотопическая инвариантности сингулярных гомологий). Если отображения  $f, g: X \rightarrow Y$  гомотопны, то  $f_* = g_*$ .

Доказывается с помощью понятия цепной гомотопии цепных комплексов.

$f_\#, g_\#: (C_*, \partial) \rightarrow (C'_*, \partial)$  называются *цепно гомотопными*, если существует отображение  $P_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ , такое что  $\partial P_n + P_{n-1} \partial = g_\# - f_\#$ .

**Утверждение 3.5.** Если  $f_{\#}$  и  $g_{\#}$  цепно гомотопны, то  $f_* = g_*$ .

Для доказательства теоремы нужно построить цепную гомотопию  $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$  между  $f_{\#}$  и  $g_{\#}$ .

Есть отображение призмы  $I \times \Delta^n \rightarrow X \times I \rightarrow Y$ . Тогда

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ (\sigma \times id) |_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]},$$

где  $v_i$  – вершины нижнего основания, а  $w_j$  – верхнего.

Тогда  $\partial P = g_{\#} - f_{\#} - P\partial$ : граница призмы = два основания и боковая поверхность.

**Упражнение 7.** Проверить это равенство.

**Следствие 3.2.** Если пространства гомотопически эквивалентны, то их группы гомологий изоморфны.

**Следствие 3.3.** Если пространства  $X$  стягиваемо, то  $\tilde{H}_n(X) = 0$  для всех  $n$ .

**Аксиома 3. Точная последовательность пары.**

Относительные группы гомологий.  $A \subset X$  – подпространство.  $(X, A)$  – (топологическая) пара.  $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ .  $\partial: C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ .

$$H_n(X, A) = Ker \partial_n / Im \partial_{n+1}.$$

$\alpha \in H_n(X, A)$  представлен относительным циклом:  $\alpha \in C_n(X)$ , таким что  $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$ .  
Относительная граница:  $\alpha = \partial\beta + \gamma$ , где  $\gamma \in C_n(A)$ .

**Теорема 3.2** (точная последовательность пары). Короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \rightarrow C.(A) \rightarrow C.(X) \rightarrow C.(X, A) \rightarrow 0$$

индуцирует длинную точную последовательность в гомологиях:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

где  $H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$  устроено так:  $\partial[\alpha] = [\partial\alpha]$ ,  $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$ .

**Аксиома 4. Аксиома вырезания.**

$H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$ . Для "хороших пар"  $(X, A)$  выполнено  $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X/A)$ .

**Теорема 3.3** (свойство вырезания). Пусть  $Z \subset A \subset X$ , причём  $\bar{Z} \subset \text{int } A$ . Тогда включение  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \subset (X, A)$  индуцирует изоморфизм

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \simeq H_n(X, A).$$

Удобно доказывать в другой формулировке.

**Теорема 3.4** (свойство вырезания). Пусть  $A, B \subset X$ , причём  $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ . Тогда

$$H_n(B, A \cap B) \simeq H_n(X, A).$$

Эквивалентность:  $B = X \setminus Z, Z = X \setminus Z$ .

**Следствие 3.4.**  $\tilde{H}_n(X \cup CA) \simeq H_n(X, A)$ , где  $CA$  – конус над пространством  $A$ .

*Доказательство.*  $\tilde{H}_n(X \cup CA) \simeq H_n(X \cup CA, CA) \simeq H_n(X \cup CA \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\}) \simeq H_n(X, A)$ .  $\square$

Хорошая пара – корасслоение:  $A \subset X$  удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Например, клеточные пары,  $A$  – абсолютный окрестностый ретракт – окрестность деформационно ретрагируется на  $A$ .

**Утверждение 3.6.** Если  $A \subset X$  – корасслоение, то отображение

$$(X, A) \rightarrow (X/A, A/A) = (X/A, pt)$$

индуцирует изоморфизм:

$$q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, pt) \simeq \tilde{H}_n(X/A).$$

*Доказательство.* Если пара хорошая, то  $X \cup CA \rightarrow (X \cup CA)/CA = X/A$  – гомотопическая эквивалентность.  $\square$

## 4 Лекция 4. Эквивалентность сингулярных и симплициальных гомологий.

**Теорема 4.1.** Пусть  $X = A \cup B$ , так что  $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ . Тогда  $H_q(B, A \cap B) \simeq H_q(X, A)$ .

*Доказательство.* Идея: для сингулярных гомологий достаточно брать «маленькие» симплексы. В каком смысле «маленький»? Как правило, симплекс захватывает оба множества. Обозначим  $C_n(A+B)$  – суммы цепей в  $A$  и цепей в  $B$ . Если заменить  $C_n(X)$  на эту группу, то теорема будет доказываться «в два счёта». Есть отображение

$$C_n(A+B)/C_n(A) \rightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

Нужно доказать, что оно индуцирует изоморфизм гомологий:  $H_n^{A+B}(X, A) \simeq H_n(X, A)$ . Имеем:  $C_n(A+B)/C_n(A) \simeq C_n(B)/C_n(A \cap B)$  – обе абелевы группы свободны и имеют одинаковый набор образующих. Пусть есть покрытие  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  пространства  $X$ :  $X = \cup_i \text{int } U_i$ . Обозначим через  $C_n^{\mathcal{U}} \subset C_n(X)$  множество линейных комбинаций симплексов, отображающихся в множества покрытия:  $\{\sum n_i \sigma_i, \sigma_i(\Delta^n) \subset U_k \text{ для нек } k\}$ . Это цепной подкомплекс:  $\partial_n C_n^{\mathcal{U}}(X) \subset C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Гомологии обозначим  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ .

**Лемма 4.1.**  $i: C_n^{\mathcal{U}}(C) \rightarrow C_n(X)$  является цепной гомотопической эквивалентностью, то есть существует  $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , что  $i\rho$  и  $\rho i$  цепно гомотопны тождественным отображениям. В частности, гомологии эквивалентны.

*Доказательство.* Нужно построить оператор барицентрического подразделения и оператор цепной гомотопии. Оператор барицентрического подразделения – сумма симплексов барицентрического подразделения со знаками. Тогда можно сделать симплексы сколь угодно малыми. Пусть  $\sigma: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ . Если  $w_i \in [v_0, \dots, v_n]$  – точки, то положим  $b_\sigma([w_0, \dots, w_k]) = [b, w_0, \dots, w_k]$ . Тогда  $\partial b_\sigma + b_\sigma \partial = id$ . Определим  $S: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  по правилу:  $S\sigma = b_\sigma S \partial \sigma$ , где  $S = id: C_0(X) \rightarrow C_0(X)$ .

Тогда  $S$  цепно гомотопно  $id: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ . Доказательство заключается в построении  $T: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ , так что  $T\partial + \partial T = id - S$ .

Для  $n = 0$  положим  $T\sigma = b_\sigma \sigma$  (вырожденный) 1-мерный симплекс в  $\sigma(v_0)$ .

Дальше по индукции  $T\sigma = b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)$ . Призму проектируем на основание.

$T\sigma: \Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n \rightarrow X$ . Дальше нужно проверить формулы:

$$\partial T\sigma = (id - T\partial - S)\sigma.$$

Граница триангулированной призмы состоит из трёх частей.

Дальше нужно применить операцию барицентрического подразделения много раз:

$$S^m: C_n(X) \rightarrow C_n(X).$$

Тогда  $\forall \sigma: \Delta^n \rightarrow X \exists m: S^m \sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Число  $m$  зависит от симплекса и не может быть выбрано одним для всех симплексов.

$$D_m = \sum_{0 \leq i < m} T S^i - \text{цепная гомотопия между } id \text{ и } S^m$$

При этом  $\partial D_m + D_m \partial = id - S^m$ . Определим  $m(\sigma)$  – наименьшее  $m$ , для которого  $S^m \sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ .  $D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ ,  $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$ . Имеем

$$\partial D_{m(\sigma)} + D_{m(\sigma)} \partial \sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma$$

Тогда  $\partial D_{m(\sigma)}\sigma = \partial D\sigma$ , но  $D_{m(\sigma)}\partial\sigma$  не обязательно равно  $D\partial\sigma$ . Определим  $\rho: C_n(X) \rightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$ :

$$\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma.$$

Тогда  $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma)$ . □

□

**Утверждение 4.1.**  $\tilde{H}_i(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n; \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$

*Доказательство.* Нужно использовать длинную точную последовательности пары  $(D^n, S^{n-1})$  и соотношение  $D^n/S^{n-1} = S^n$ . □



**Теорема 4.2.**  $\tilde{H}_i(\Sigma X) \simeq \tilde{H}_{i-1}(X)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим пару  $(CX, X)$ . Тогда  $X \simeq CX$  – корасслоение для любого  $X$  и  $CX/X \simeq \Sigma X$ .  $\square$

**Теорема 4.3.** Пусть есть набор пар  $(X_\alpha, x_\alpha)$ , где каждое вложение точки  $x_\alpha \subset X_\alpha$  – корасслоение. Тогда

$$\tilde{H}_n(\vee_\alpha X_\alpha) = \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha), \quad n \geq 0.$$

*Доказательство.*  $\vee_\alpha X_\alpha = \sqcup_\alpha X_\alpha / \sqcup_\alpha x_\alpha$ .  $\square$

**Теорема 4.4** («инвариантность размерности»). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  – открыты и  $U \simeq V$  гомеоморфны. Тогда  $m = n$ .

*Доказательство.*  $\forall x \in U$

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \simeq H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(S^{m-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = m, \\ 0, & i \neq m \end{cases}$$

$\square$

**Теорема 4.5** (Точная последовательность Майера-Вьеториса). Пусть  $A, B \subset X$ , так что  $\text{int } A \cup \text{int } B = X$ . Тогда есть точная последовательность

$$\rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0$$

*Доказательство.* Есть точная последовательность комплексов

$$0 \rightarrow C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A) \oplus C_n(B) \rightarrow C_n(A + B) \rightarrow 0 : x \rightarrow (-x, x), (x, y) \rightarrow x + y.$$

Из неё следует существование длинной точной последовательности.  $\square$

**Теорема 4.6.** Пусть  $(X, A)$  – симплициальный комплекс и подкомплекс. Тогда вложение  $\Delta_n(X, A) \rightarrow C_n(X, A)$  индуцирует изоморфизм гомологий, где  $\Delta_n(X, A)$  – симплициальные цепи пары.

*Доказательство.* Пусть  $X$  конечномерен и  $A = \emptyset$ . Рассмотрим  $X^k$  –  $k$ -мерный остов.

$$\rightarrow H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_n^\Delta(X^{k-1}) \rightarrow H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \rightarrow$$

отобразим в такую же последовательность для сингулярных гомологий. Тогда результат следует индукцией по размерности  $k$  при помощи леммы о пяти гомоморфизмах.

Для бесконечного комплекса нужно пользоваться компактностью. Для  $A \neq \emptyset$  нужно использовать ещё одну точную последовательность – пары  $(X, A)$ . Далее воспользоваться леммой о пяти гомоморфизмах.  $\square$

## 5 Лекция 5. Клеточные гомологии и сингулярные ко-гомологии.

### 5.1 Клеточные гомологии.

Клеточное пространство – объединение клеток с двумя аксиомами. Для каждой клетки зафиксированно отображение. В частности, задана ориентация.

$X$  – клеточное пространство.  $X^n = sk^n X$  –  $n$ -мерный остов (объединение клеток размерности не более  $n$ ). Внутренности симплексов образуют клеточное разбиение для симплициального комплекса.

$C_n(X)$  – клеточные цепи – формальные линейные комбинации клеток.

$\partial^c: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  – граничное отображение.

$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ . Тогда клеточный граничный гомоморфизм – отображение длинной точной последовательности тройки.

**Лемма 5.1.** 1.  $H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ \text{свободная абелева группа с базисом из } n\text{-клеток,} & k = n. \end{cases}$

2.  $H_k(X^n) = 0$  при  $k > n$ .

3. пусть  $i: X^n \rightarrow X$  – вложение. Тогда  $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$  – изоморфизм при  $k < n$ .

*Доказательство.* Идея:

1.  $X^{n-1} \subset X^n$  – корасслоение, поэтому  $H_k(X^n, X^{n-1}) \simeq \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) = \tilde{H}_k(\vee S^n)$ . Биективное непрерывное отображение компактного пространства на хаусдорфово – гомеоморфизм.

2. Следует из длинной точной последовательности пары по индукции:

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow$$

$$k \neq n, n-1 \Rightarrow H_k(X^{n-1}) = H_k(X^n). \quad k > n \quad H_k(X^n) = H_k(X^{n-1}) = \cdots = H_k(X^0).$$

3.  $k < n: H_k(X^n) = H_k(X^{n+1}) = \cdots = H_k(X^{n+2}) = \cdots$

□

**Упражнение 8** (Точная последовательность тройки).  $B \subset A \subset X$ . Тогда имеется длинная точная последовательность:

$$\rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

где  $H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(A, B)$  – композиция.

Граничное отображение:  $H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ .

Квадрат равен нулю:

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow H_{n-2}(X^{n-2}) \rightarrow H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}).$$

$C. = \{C_n(X), \partial_n^c\}$  – клеточный цепной комплекс.  $\mathcal{H}_n$  – клеточные гомологии.

**Теорема 5.1.** *Клеточные гомологии совпадают с сингулярными. Изоморфизм функториален относительно клеточных отображений.*

Для доказательства предыдущую диаграмму нужно достроить.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0 \\
 & & & & \nearrow \\
 & & & & \\
 0 = H_n(X^{n-1}) & & & & H_n(X^{n+1}) = H_n(X) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & H_n(X^n) & & \\
 & \nearrow & \searrow & & \\
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \longrightarrow & H_n(X^n, X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) & \\
 & & \nearrow & & \\
 & & H_{n-1}(X^{n-2}) = 0 & & 
 \end{array}$$

**Следствие 5.1.** *Если  $X$  имеет  $k$  клеток размерности  $n$ , то  $H_n(X)$  порождена не более, чем  $k$  элементами. В частности, если нет клеток размерности  $n$ , то  $H_n(X) = 0$ .*

**Следствие 5.2.** *Если в  $X$  нет пар клеток в соседних размерностях (например, если  $X$  имеет только клетки чётной размерности), то  $H_n(X)$  – свободная абелева группа, порождённая  $n$ -клетками.*

**Пример 5.1.**  $H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 2, 4, \dots, 2n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

**Теорема 5.2.** *При  $n > 1$  имеем  $\partial^c(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$ , где  $d_{\alpha\beta}$  – степень отображения  $f_{\alpha\beta} = q_\beta \circ \varphi_\alpha$ :*

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X^{n-1} & \xrightarrow{q_\beta} & S^{n-1} \\
 & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\
 & & & f_{\alpha\beta} & 
 \end{array}$$

Здесь  $\varphi_\alpha$  – приклеивающее отображение и  $q_\beta: X^n \rightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \simeq S^{n-1}$ .

**Упражнение 9.** *Найти гомологии двумерных поверхностей.*

**Упражнение 10.** *Найти гомологии пространства  $\mathbb{R}P^n$  с коэффициентами  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}_2$ .*

## 5.2 Кольцо когомологий

Коцепи – функции из цепного комплекса в кольцо коэффициентов.

$C^n(X; G) = \text{Hom}(C_n(X), G)$  – сингулярные коцепи.

$\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  – граничный гомоморфизм.  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ .

$\partial_n \sigma = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}$ .

$d_{n-1}: C^{n-1}(X) \rightarrow C^n(X)$  – кограничный гомоморфизм.

$\langle d_{n-1}c, \sigma \rangle = \langle c, \partial_n \sigma \rangle$ . Иногда пишут знак  $(-1)^{n-1}$ . Мы не будем писать.

$c \in C^{n-1}(X)$ ,  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ ,  $\sigma \in C_n(X)$ .

$d_{n-1}c(\sigma) = \sum_i (-1)^i c(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]})$ .

$\partial_n \partial_{n+1} = 0 \Rightarrow d_n d_{n-1} = 0$ .

$$H^n(X; G) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}.$$

$X \rightarrow Y \Rightarrow H^k(Y) \rightarrow H^k(X)$ .

Вообще говоря,  $H^k(X, H) \neq \text{Hom}(H_k(X), G)$ . Есть дополнительное прямое слагаемое  $\text{Ext}(H_{k-1}(X), G)$ .

Есть существенная разница для бесконечных пространств.

**Теорема 5.3.** Пусть  $(X_\alpha, x_\alpha)$  – набор пространств, для каждого из которых вложение точки – корасслоение. Тогда

$$\tilde{H}^n(\bigvee_\alpha X_\alpha) \simeq \prod_\alpha \tilde{H}^n(X_\alpha)$$

$$\text{Hom}(\bigoplus_\alpha G_\alpha, H) \simeq \prod_\alpha \text{Hom}(G_\alpha, H).$$

Структура кольца:

$R$  – коммутативное кольцо с единицей (как правило,  $\mathbb{Z}$  или поле).

Определим  $\cup: H^p(X; R) \times H^q(X, R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$  так что  $H^*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; R)$  – ассоциативное градуированно коммутативное кольцо с единицей.

Определение: для коцепей  $a \in C^p(X; R)$ ,  $b \in C^q(X, R) \rightarrow a \cup b \in C^{p+q}(X; R)$ .

Положим для  $\sigma: [v_0, \dots, v_{p+q}] \rightarrow X$

$$a \cup b(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) \cdot b(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}).$$

В 30-е годы в разных вариантах придумали 4 автора: Александер, Колмогоров, Уитни, Чех(?).

**Лемма 5.2.**  $d(a \cup b) = (da) \cup b + (-1)^p a \cup (db)$ ,  $a \in C^p(X, R)$ .

Градуированное кольцо  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$  – подгруппы,  $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$ .

Градуированно коммутативно:  $ab = (-1)^{ij} ba$ .

**Теорема 5.4.**  $H^*(X, R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X, R)$  – ассоциативное градуированно коммутативная  $R$ -алгебра с единицей.

*Идея доказательства.* Произведение коциклов – коцикл. Произведение коцикла и кограницы – кограница. Поэтому определено умножение

$$\cup: H^p(X, R) \times H^q(X, R) \rightarrow H^{p+q}(X, R)$$

Оно ассоциативно, с единицей  $1 \in H^0(X, R)$  – постоянное отображение. Нетривиальная часть – градуированная коммутативность. При перестановке получается совсем другое выражение.

□

## 6 Лекция 6. Умножение в когомологиях.

Умножение Колмогорова-Александера  $a \in C^p(X)$ ,  $b \in C^q(X)$ ,  $\sigma: \Delta^{p+q} = [v_0, \dots, v_{p+q}] \rightarrow X$ .

$$\begin{aligned} (a \cup b)(\sigma) &= a(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]})b(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}) \\ d(a \cup b) &= (da) \cup b + (-1)^p a \cup (db). \\ \cup: H^p(X) \otimes H^q(X) &\rightarrow H^{p+q}(X). \end{aligned}$$

**Теорема 6.1.**  $H^*(X, R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X, R)$  – ассоциативное градуированно коммутативное кольцо (алгебра над  $R$ ) с единицей.

Всё понятно с ассоциативностью. Трудность заключается в градуированной коммутативности. На уровне коцепей её нет.

$\omega: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  – обращение порядка вершин.

$\sigma: [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma \circ \omega$ ,  $\bar{\sigma}(v_i) = \sigma(v_{n-i})$ .

$$\rho: C_n(X) \rightarrow C_n(X), \sigma \rightarrow \varepsilon_n \bar{\sigma}, \varepsilon_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \text{sgn} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rho^*(a) \cup \rho^*(b) = (-1)^{pq} \rho^*(b \cup a)$$

$$\rho \partial = \partial \rho$$

$P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$  призмный оператор.

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varepsilon_{n-i} (\sigma \pi)|_{[v_0, \dots, w_{n-i}, \dots, w_i]}.$$

Тогда  $\partial P + P \partial = \rho - id$ .

Следовательно,  $[\rho^*(a)] = [a]$ ,  $[\rho^*(b)] = b$ , и  $[a] \cup [b] = (-1)^{pq} [b] \cup [a]$ .

**Утверждение 6.1.**  $f: X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение. Тогда  $f^*: H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X, R)$  – гомоморфизм колец, то есть  $f^*(a \cup b) = f^*(a) \cup f^*(b)$ .

Относительные когомологии:

$$\begin{aligned} \cup: H^p(X) \otimes H^q(X, A) &\rightarrow H^{p+q}(X, A) \\ \cup: H^p(X, A) \otimes H^q(X, A) &\rightarrow H^{p+q}(X, A) \\ \cup: H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) &\rightarrow H^{p+q}(X, A \cup B) \end{aligned}$$

Третье – если  $(X, A)$  и  $(X, B)$  – клеточные пары, или  $A, B$  – открыты в  $X$ .

$C^p(X, A) \times C^q(X, B) \rightarrow C^{p+q}(X, A + B)$ . Справа – коцепи, которые отображаются в ноль на цепях из  $A$  и  $B$ .

Отображение  $C^{p+q}(X, A \cup B) \rightarrow C^{p+q}(X, A + B)$  индуцируют изоморфизм  $H^{p+q}(X, A \cup B) \rightarrow H_{A+B}^{p+q}(X, A + B)$ .

## 6.1 $\times$ -произведение

$$\begin{aligned} \times &: H^p(X; R) \otimes H^q(Y; R) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y; R) \\ \times &: H^p(X, A) \otimes H^q(Y, B) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \\ \alpha \times \beta &= p_X^*(\alpha) \cup p_Y^*(\beta), \text{ где } p_X: X \times Y \rightarrow X, p_Y: X \times Y \rightarrow Y \text{ – проекции.} \end{aligned}$$

## 6.2 Клеточное умножение

$X, Y$  – клеточные пространства.  $X \times Y$  – клеточное пространство с клетками  $e_\alpha^m \times e_\beta^n$ , где  $e_\alpha^m \subset X, e_\beta^n \subset Y$  – клетки.

Если хотя бы одно из них конечно, то на произведении  $CW$ -топология совпадает с топологией произведения. Вообще говоря, нет.

$$\times: C_m(X) \times C_n(Y) \rightarrow C_{n+m}(X \times Y), (e_\alpha^m \times e_\beta^n) \rightarrow e_\alpha^m \times e_\beta^n.$$

*Замечание 6.1.* Можно определить то же самое для сингулярных цепей

$$\times: C_p(X) \times C_q(Y) \rightarrow C_{p+q}(X \times Y)$$

за счёт триангуляции произведения  $\sigma \times \tau$ .

**Лемма 6.1.**  $\partial(e_\alpha^m \times e_\beta^n) = (\partial e_\alpha^m) \times e_\beta^n + (-1)^m e_\alpha^m \times (\partial e_\beta^n)$

Для коцепей:

$$\times: C^p(X) \times C^q(Y) \rightarrow C^{p+q}(X \times Y), c_1 \times c_2(e_\alpha^m \times e_\beta^n) = c_1(e_\alpha^m) \cdot c_2(e_\beta^n)$$

*Замечание 6.2.* Иногда определяют  $d: C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X)$  по формуле  $\langle dc, e^n \rangle = (-1)^p \langle c, \partial e^n \rangle$ ,  $c \in C^p(X)$ . Тогда также определяют  $\langle c_1 \times c_2, e_\alpha^m \times e_\beta^n \rangle = (-1)^{qm} c_1(e_\alpha^m) \cdot c_2(e_\beta^n)$  и выполнено равенство  $d(c_1 \times c_2) = (dc_1) \times c_2 + (-1)^p c_1 \times (dc_2)$ .

Определим

$$\cup: H^p(X) \times H^q(X) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X)$$

где  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  – диагональное отображение. На уровне коцепей зависит от клеточной аппроксимации диагонали. Для гомологий уже не зависит. Доказывается путём связи с сингулярными гомологиями.

Не существует выбора естественной (т.е. функториальной) клеточной аппроксимации  $\tilde{\Delta}: X \rightarrow X \times X$ , такой что диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & X \times X \\ \downarrow f & & \downarrow f \times f \\ X & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & X \times X \end{array}$$

**Теорема 6.2** (без доказательства). *Произведение, определённое на клеточных когомологиях, совпадает с произведением, определённым через сингулярные когомологии.*

**Теорема 6.3** (Формула Кюннета, без доказательства). *Пусть  $X, Y$  – клеточные пространства,  $R$  – область главных идеалов (например,  $\mathbb{Z}$  или поле). Тогда*

$$0 \rightarrow \oplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \oplus_i \text{Tor}(H_i(X), H_{n-i-1}(Y)) \rightarrow 0$$

*Если  $H_i(Y, R)$  – свободный  $R$ -модуль для всех  $i$  (например, если  $R$  – поле). Тогда*

$$\oplus_i H_i(X, R) \otimes H_{n-i}(Y, R) \simeq H_n(X \times Y, R)$$

*и*

$$\oplus_i H^i(X, R) \otimes H^{n-i}(Y, R) \simeq H^n(X \times Y, R)$$

**Задача 4.**  $H^*(T^n) = \Lambda[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  – внешняя алгебра, где  $\alpha \in H^1(S^1)$  – образующая и  $\alpha_i = p_i^*(\alpha)$ ,  $p_i: T^n \rightarrow S^1$ .

**Задача 5.**  $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1})$ ,  $H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u]$ ,  $\deg u = 1$ .

**Задача 6.**  $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v]/(v^{n+1})$ ,  $H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v]$ ,  $\deg v = 2$ .

**Задача 7.**  $H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v]/(2v)$ ,  $\deg v = 2$ .

## Список литературы

- [1] В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.
- [2] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, <http://www.math.cornell.edu/?hatcher>.
- [4] Anders Björner, Martin Tancer, *Note: Combinatorial Alexander duality – a short and elementary proof*, Discrete & Computational Geometry volume 42, Article number: 586 (2009), arXiv:0710.1172v3.
- [5] Т.Е. Панов. *Топология 2. Лекции в НМУ*.