

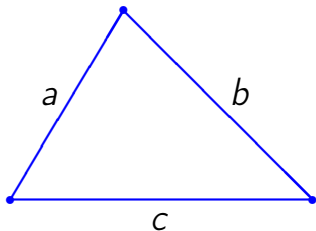
Объём многогранника как многозначная функция длин его рёбер. Изгибаемые многогранники

А. А. Гайфуллин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

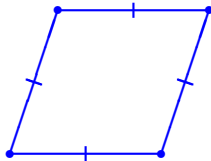
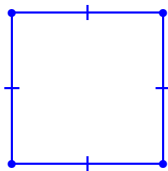
Москва, 14 марта 2013 г.

Формула Герона



$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$



Нет формулы
для площади
через длины
рёбер

Формула Кэли–Менгера

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – n -мерный симплекс с вершинами p_0, p_1, \dots, p_n и ℓ_{ij} – длина ребра $p_i p_j$.

Определитель Кэли–Менгера:

$$CM(p_0, \dots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{01}^2 & \ell_{02}^2 & \dots & \ell_{0n}^2 \\ 1 & \ell_{01}^2 & 0 & \ell_{12}^2 & \dots & \ell_{1n}^2 \\ 1 & \ell_{02}^2 & \ell_{12}^2 & 0 & \dots & \ell_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ell_{0n}^2 & \ell_{1n}^2 & \ell_{2n}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$V^2(\Delta) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(p_0, \dots, p_n).$$

Вычисление объёма симплициального многогранника

Определение

Многогранник называется **симплициальным**, если все его собственные грани — симплексы.

Проблема

Пусть $n \geq 3$. Можно ли найти формулу для объёма симплициального n -мерного многогранника через длины его рёбер?

“Найти формулу” означает найти соотношение вида

$$V^N + a_1(\ell)V^{N-1} + \dots + a_N(\ell) = 0,$$

где a_j — многочлены от длин рёбер многогранника.

- $n = 3$: **ДА**, И. Х. Сабитов, 1996.
- $n \geq 4$: **ДА**, А. А. Гайфуллин, 2011-2012.

Определение

Изгибание многогранника — непрерывное семейство многогранников P_t , $0 \leq t \leq 1$, такое, что все собственные грани P_t остаются конгруэнтными себе в процессе изгибания, но многогранники P_{t_1} и P_{t_2} не конгруэнтны при $t_1 \neq t_2$.

- **Теорема Коши:** Выпуклые многогранники неизгибаемы.
- **Брикар, 1897:** Изгибаемые самопересекающиеся октаэдры.
- **Коннелли, 1977:** Пример вложенного изгибаемого многогранника.
- **Штеффен, 1978:** Простейший из известных вложенных изгибаемых многогранников (9 вершин).
- **Фогельзангер, 1988:** Многогранники общего положения неизгибаемы.
- **Вальц, 1998, Штахель, 2000:** Изгибаемые 4-мерные кросс-политопы.
- Неизвестно, существуют ли изгибаемые многогранники в \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа

Изгибаемый октаэдр Брикара второго типа

Изгибаемый многогранник Коннелли – первый пример вложенного изгибаемого многогранника

Изгибаемый многогранник Штеффена – простейший из известных вложенных изгибаемых многогранников

Гипотеза (Р. Коннелли, 1978)

Объём $V(P_t)$ изгибаемого многогранника постоянен в процессе изгибания.

Теорема

- 1 (И. Х. Сабитов, 1996) *Гипотеза о кузнечных мехах верна в размерности 3.*
- 2 (А. А. Гайфуллин, 2011-2012) *Гипотеза о кузнечных мехах верна во всех размерностях, больших 3.*