ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ В РАБОТАХ Т. Е. ПАНОВА

1. Введение в предмет исследования

Общая теория действий тора имеет длинную историю развития и образует важную область эквивариантной топологии. *Торическая топология* изучает алгебраические, комбинаторные, дифференциальные и гомотопические аспекты класса действий тора, для которых пространство орбит несёт богатую комбинаторную структуру. Особенностью этой области является возможность вычисления инвариантов в терминах комбинаторики пространства орбит, а одной из основных целей является классификация торических пространств при помощи этих инвариантов.

Первоначальный импульс этому развитию придала теория *торических многообразий* в алгебраической геометрии. Эта теория устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными алгебраическими многообразиями с действием комплексного тора, имеющим плотную орбиту, и комбинаторными объектами, называемыми *веерами*. При помощи вееров алгебро-геометрические свойства торических многообразий полностью переводятся на язык комбинаторики. Торическая геометрия предоставляет богатый источник явных примеров алгебраических многообразий и имеет богатые приложения в таких областях, как теория особенностей и зеркальная симметрия. Пространство орбит неособого проективного торического многообразия по действию компактного тора T^n представляет собой выпуклый простой многогранник P. Двойственный многогранник является симплициальным, а его граница является симплициальным комплексом K.

В симплектической геометрии, после появления теоремы выпуклости Атьи–Гиёмина–Стернберга [6] и формулы Дуистермаата–Хекмана [14] в начале 1980-х годов, активно изучались гамильтоновы действия групп. В работе Делзанта [13] 1988 года было показано, что в случае действия тора размерности, равной половине размерности многообразия, образ отображения моментов определяет многообразие с точностью до эквивариантного симплектоморфизма. Как и в геометрии торических многообразий, в симплектической геометрии различные геометрические конструкции имеют комбинаторную интерпретацию в терминах многогранников.

Имеется тесная взаимосвязь между алгебраическими и симплектическими многообразиями с действием тора: проективное вложение неособого торического многообразия определяет симплектическую форму и отображение моментов. Образом отображения моментов является многогранник, двойственный к вееру. Как в алгебраической, так и в симплектической ситуации, действие компактного тора локально изоморфно стандартному действию $(S^1)^n$ на $\mathbb{C}^n$ покоординатными вращениями. Факторпространство многообразия по такому действию тора представляет собой многообразие с углами. Таким образом, пространство орбит действия тора несёт комбинаторную структуру, отражающую распределение стационарных подгрупп и позволяющую полностью восстановить многообразие и действие. Замечательно, что этот подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространства с действием тора удаётся интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически. Эта особенность алгебраических торических многообразий имеет чисто топологическую природу, что вызвало активное проникновение идей и методов торической и симплектической геометрии в алгебраическую топологию с начала 1990-х годов.

Дальнейшие исследования выявили ряд важных классов многообразий с действием тора, происхождение которых восходит к торическим или симплектическим многообразиям. Эти более общие многообразия имеют чисто топологическую природу и обычно не являются алгебраическими или симплектическими, что предоставляет более широкие возможности для приложения методов торической топологии в комбинаторике и коммутативной алгебре, но в то же время обладают важнейшими топологическими свойствами их алгебраических или симплектических предшественников. Опишем некоторые из этих классов.

Подход Дэвиса–Янушкиевича [12] к изучению торических многообразий с топологической точки зрения привёл к появлению *квазиторических многообразий*. Этот класс многообразий определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление T^n в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. (Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии.)

Хаттори и Масуда ввели в [17] намного более широкий класс *тор-многообразий*, которые также можно рассматривать как далеко идущее обобщение торических многообразий. Тор-многообразие M представляет собой $2n$-мерное гладкое компактное многообразие с эффективным действием тора T^n, множество неподвижных точек которого непусто (заметим, что оно всегда конечно). Несмотря на достаточную общность этого класса, тор-многообразия допускают комбинаторное описание, аналогичное описанию торических многообразиям в терминах вееров или многогранников. Роль последних играют так называемые *мультивееры* и *мультимногогранники*.

Пространство орбит Q квазиторического или тор-многообразия является многообразием с углами, а его грани образуют относительно обратного включения симплициальное частично упорядоченное множество S. В случае квазиторического многообразия последнее представляет собой множество граней настоящего симплициального комплекса K, двойственного к простому многограннику Q.

Комбинаторный подход к изучению гамильтоновых действий тора привёл к понятию *ГКМ-многообразий*. Согласно [16], компактное $2n$-мерное многообразие M с эффективным действием тора $T^k \times M \to M$ $(k \leq n)$ называется ГКМ-многообразием, если множество неподвижных точек конечно, M обладает инвариантной почти комплексной структурой, и веса представлений тора T^k в касательных пространствах к неподвижным точкам попарно линейно независимы. Эти многообразия были названы в честь Горески, Коттвица и Макферсона, которые впервые ввели их в [15]. Там же было показано, что "1-остов" такого многообразия M, т.е. множество точек, имеющих стационарную подгруппу коразмерности не больше 1, может быть описано при помощи графа с метками (Γ, α). Этот граф, называемый *ГКМ-графом*, позволяет вычислять важные топологические инварианты многообразия M, такие как его числа Бетти или кольцо эквивариантных когомологий. Изучение таких графов приобрело самостоятельный комбинаторный интерес благодаря работам Гиёмина, Зары [16] и других. Идея сопоставления графа с метками многообразию с действием окружности впервые возникла в работах Мусина начала 1980-х.

Стенли был одним из первых, кто осознал полный потенциал торических действий для комбинаторных приложений, использовав его для доказательства *гипотезы Макмюллена* о числах граней симплициальных многогранников и *гипотезы о верхней границе* для триангуляций сфер. Его результаты и методы легли в основу известной монографии [25] и предопределили дальнейшие приложения коммутативной алгебры и гомологических методов в комбинаторной геометрии.

Многие идеи Стенли находят и топологическое применение; в частности, *кольцо граней* (или *кольцо Стенли–Райснера*) $\mathbb{Z}[K]$ симплициального комплекса K является важной составляющей в вычислении кольца когомологий квазиторического многообразия M. В ходе своего вычисления этого кольца Дэвис и Янушкиевич сопоставили некоторое вспомогательное T^m-пространство $\mathcal{Z}_K$ каждому комплексу K с m вершинами, и рассмотрели его гомотопическое факторпространство (или *конструкцию Бореля*) $DJ(K)$. Определение пространства $\mathcal{Z}_K$ навеяно конструкцией Винберга универсального пространства для групп отражений и аналогично определению *комплекса Кокстера*. Дэвис и Янушкиевеч показали, что кольцо когомологий пространства $DJ(K)$ (или *эквивариантные когомологии* многообразия M)) изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[K]$ для любого K. Они также вывели, что кольцо обычных когомологий $H^*(M)$ получается из $\mathbb{Z}[K]$ факторизацией некоторых линейных форм, в точности как и для торических многообразий.

С появлением понятия кольца граней стало ясно, что многие тонкие комбинаторные свойства комплексов K можно интерпретировать алгебраически. Изучение колец граней получило самостоятельное развитие и привело к новому классу *колец Коэна–Маколея*, имеющих геометрическую природу. В частности, возникло новое топологическое понятие *комплекса Коэна–Маколея*, для которого $\mathbb{Z}[K]$ является кольцом Коэна–Маколея. Подробное изложение этих понятий можно найти в монографии [7], где также подчёркивается важность гомологического подхода. Например, в [25] и [7] рассматриваются размерности биградуированных компонент векторных пространств $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k[K],k)$, называемые *алгебраическими числам Бетти* кольца $k[K]$, для любого поля k. Эти числа являются весьма тонкими инвариантами: они зависят от комбинаторики K, а не только от топологии его реализации |K|, и полностью определяют "обычные" топологические числа Бетти для $|K|$. Теорема Хохстера выражает алгебраические числа Бетти через гомологии полных подкомплексов в K.

2. О результатах Т. Е. Панова

Изложению результатов о квазиторических многообразиях и момент-угол комплексах, их роли в торической топологии и приложениям в комбинаторной геометрии и гомологической алгебре посвящена монография Бухштабера и Панова [10], вышедшея в серии "University Lecture Series" Американского Математического общества. В 2004 году появилось её существенно расширенное русском издание [4]. Многие результаты получили дальнейшее развитие в работах Панова с другими соавторами.

Роды Хирцебруха торических и квазиторических многообразий. Работы Бухштабера–Рэя показали [8], что квазиторические многообразия играют важную роль в теории комплексных кобордизмов — классической области алгебраической топологии. В отличие от торических многообразий, квазиторические многообразия могут не быть комплексными, однако они всегда допускают стабильно комплексную структуру, и их классы кобордизмов порождают всё кольцо комплексных кобордизмов. Стабильно комплексная структура на квазиторическом многообразии определяется в чисто комбинаторных терминах — при помощи так называемой *характеристической функции*, сопоставляющей каждой гиперграни многогранника P^n некоторый примитивный вектор в $\mathbb{Z}^n$ (характеристическая функция играет роль веера, сопоставляемого торическому многообразию в алгебраической геометрии). В работе Панова [5] получены эффективные комбинаторные формулы, вычисляющие ряд важных родов Хирцебруха квазиторических многообразий в терминах характеристической функции. Эти формулы переносят на случай квазиторических многообразий известные результаты торической геометрии, опирающиеся на теорему Римана–Роха–Хирцебруха. В случае старшего числа Чженя c_n и рода Тодда формулы Т. Е. Панова приводят к препятствиям к существованию эквивариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии, что является важным продвижением в проблеме, поставленной Дэвисом и Янушкиевичем [12].

Момент-угол комплексы. Теория *момент-угол комплексов*, одним из создателей которой является Т. Е. Панов, представляет собой один из основных инструментов современных приложений торической топологии. Момент-угол комплексы тесно связаны с торическими и квазиторическими многообразиями и своим происхождением обязаны работе [12], где каждому симплициальному комплексу K с m вершинами было сопоставлено вспомогательное T^m-пространство $\mathcal{Z}_K$. Вскоре стало ясно, что пространства $\mathcal{Z}_K$ представляют отдельный большой интерес в торической топологии, и они получили известность под названием момент-угол комплексов [10]. Они возникают в теории гомотопий как *гомотопические копределы* диаграмм торов [23], в симплектической топологии как поверхности уровня для *отображений моментов* гамильтоновых действий тора [22] и в теории конфигураций подпространств как *дополнения конфигураций координатных подпространств* [10, Ch. 8]. Конструкция момент-угол комплексов даёт функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений. Если K является триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{Z}_K$ является $(m+n)$-мерным многообразием. Более того, если $K = \partial P$ — триангуляция сферы, двойственная к границе простого многогранника, то имеется главное T^{m-n}-расслоение $\mathcal{Z}_K \to M$ для любого (квази)торического многообразия M с пространством орбит P.

Когомологии момент-угол комплексов и кольца граней. В работе [1] вычислены когомологии момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ в терминах симплициального комплекса K. Доказан изоморфизм алгебры когомологий $H^*(\mathcal{Z}_K)$ и Tor-*алгебры* $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}[K]$ — кольцо граней комплекса K. При этом показано, что каноническая биградуировка в Tor имеет явную геометрическую реализацию, обусловленную введённой в $\mathcal{Z}_K$ биградуированной клеточной структурой. Дальнейший анализ привёл к эффективному описанию Tor-алгебры в терминах комплекса Кошуля, которое открыло пути применения известных пакетов компьютерных программ (Macaulay2, Bistellar и др.) для вычислений в комбинаторной геометрии.

Дополнения конфигураций подпространств. Область приложения результата о когомологиях $\mathcal{Z}_K$ оказалась широкой благодаря тому, что момент-угол комплексы $\mathcal{Z}_K$ имеют различные, на первый взгляд не связанные между собой, реализации. Среди них выделим реализацию $\mathcal{Z}_K$ в виде неособого некомпактного торического многообразия; поверхности уровня для отображения моментов, используемого в конструкции торических многообразий на основе симплектической редукции; дополнения к конфигурации координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$. В каждом случае получается решение известной задачи об описании соответствующего кольца когомологий. Отметим, что известные результаты о когомологиях дополнений конфигураций координатных подпространств либо не описывают мультипликативной структуры (как общая теорема Горески–Макферсона), либо дают лишь описание произведения двух данных коциклов в комбинаторных терминах (как недавние результаты де Лонгвилле). Теорема Бухштабера–Панова о момент-угол комплексах даёт исчерпывающее глобальное описание кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств.

Векторы граней (f-векторы). Вычисление когомологий момент-угол комплексов имеет непосредственное отношение к классу комбинаторных проблем, связанных с *векторами граней* многогранников и триангуляций. *Вектором граней*, или f-*вектором*, $(n-1)$-мерного симплициального комплекса K называется целочисленный вектор, компонентами f_i которого являются числа граней размерности $i = 0,\dots,n-1$. Многие важные свойства векторов граней могут быть описаны путём выражения их в терминах чисел Бетти момент-угол комплексов. Открытая в теории момент-угол комплексов биградуированная двойственность Пуанкаре в случае триангуляции сферы привела к известным *соотношениям Дена–Соммервилля* на числа граней f_i размерности $0 \le i \le n-1$ в триангуляции. Эти соотношения имеют вид $h_i = h_{n-i}$, где $h(K) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ — так называемый h-*вектор* триангуляции, компоненты которого являются линейными комбинациями чисел f_i. В случае триангуляции произвольного многообразия более тонкий анализ двойственности Пуанкаре позволил получить *обобщённые соотношения Дена–Соммервилля* вида $h_{n-i} - h_i = (-1)^i(\chi(K) - \chi(S^{n-1}))C_n^i$ для триангулированных многообразий.

Торическая топология и геометрическая теория инвариантов. Недавно методы торической топологии и, в частности, теория момент-угол комплексов нашли применения в теории действий алгебраических групп. В работе Панова [22] построены *множества типа Кемпфа–Несс* для действий алгебраического тора на некоторых квазиаффинных многообразиях и описана топология этих множеств. В классической ситуации действий алгебраических групп на аффинных многообразиях понятие множества Кемпфа–Несс позволяет заменить категорный фактор на факторпространство по действию максимальной компактной подгруппы. Мы показываем, что момент-угол комплекс играет роль множества Кемпфа–Несс для класса действий алгебраического тора на квазиафинных многообразиях (дополнениях конфигураций координатных подпространств), возникающих в подходе Батырева–Кокса к торическим многообразиям на основе геометрической теории инвариантов. Затем мы применяем наши результаты о когомологиях момент-угол комплексов в вычислению когомологий этих "торических" множеств Кемпфа–Несс. В случае неособых проективных торических многообразий соответствующие множества Кемпфа–Несс могут быть описаны как полные пересечения вещественных квадрик в комплексном пространстве.

Аналогичные многогранники и кобордизмы квазиторических многообразий. В работе Бухштабера–Панова–Рэя [11] методы выпуклой геометрии и, в частности, теория *аналогичных многогранников* применяются для изучения квазиторических многообразий в контексте стабильно комплексных многообразий с действием тора. Понятие аналогичных многогранников впервые появилось в работах Александрова в 1930-х годах, а затем теория аналогичных многогранников получила существенное развитие в недавних работах Пухликова и Хованского. Наши приложения этой теории включают явную конструкцию квазиторического представителя в каждом классе комплексных кобордизмов. Квазиторический представитель строится как факторпространство вещественного полного пересечения квадратичных гиперповерхностей по действию тора. Это полное пересечение есть ни что иное, как ещё одна интерпретация момент-угол комплекса. Мы предлагаем систематическое описание квазиторических многообразий в терминах комбинаторных данных, и описываем взаимосвязь с неособыми проективными торическим многообразиями. Интерпретируя в этих терминах подход Бухштабера–Рэя [8] к построению торических представителей в классах кобордизмов, мы упрощаем и уточняем два доказательства из [8], касающихся многогранников — пространств орбит. Первый из этих результатов описывает оснащение вложения многогранника в положительный октант, а второй уточняет конструкцию связной суммы многогранников и квазиторических многообразий, необходимым образом учитывая ориентации. В каждом из этих случаев применение теории аналогичных многогранников существенно упрощает картину и предоставляет замечательный инструмент для работы с многогранниками — пространствами орбит.

Гомотопические аспекты торической топологии. Различные конструкции *гомотопических прямых пределов* в последнее время часто возникают в приложениях гомотопической топологии. В работе Панова, Рэя и Фогта [23] было доказано, что функторы классифицирующего пространства и пространства петель коммутируют с функтором гомотопического прямого предела (с классическим функтором прямого предела они не коммутируют). В качестве следствия получены модели пространств петель на момент-угол комплексах и их конструкциях Бореля — *пространствах Дэвиса–Янушкиевича* — в виде гомотопических прямых пределов диаграмм торов в категории топологических групп. Эти модели применены для вычислении Ext-когомологий $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}[K]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ кольца Стенли–Райснера — классической задачи гомологической алгебры. Это применение стало возможным благодаря результату Бухштабера–Панова [10] об изоморфизме когомологий кольца Стенли–Райснера и кольца Понтрягина гомологий петель на пространстве Дэвиса–Янушкиевича.

Когомологии тор-многообразий. В работе Панова и Масуды [20] получен ряд результатов о взаимосвязи когомологических свойств тор-многообразий и комбинаторики их пространств орбит. Отметим наиболее значительные из этих результатов. Кольцо когомологий тор-многообразия M порождается элементами степени два тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гомологическим многогранником (т.е. все грани, включая само Q, ацикличны, и все непустые пересечения граней связны). В этом случае само кольцо когомологий описывается таким же образом, как кольцо когомологий неособого компактного торического многообразия. Рассмотрен более широкий класс тор-многообразий M, у которых когомологии обращаются в нуль в нечётных размерностях. Этот класс характеризуется тем, что эквивариантные когомологии такого многообразия M являются *кольцом Коэна–Маколея* — свободным конечно-порождённым модулем над кольцом эквивариантных когомологий точки. Пространство орбит тор-многообразия с $H^{odd}(M) = 0$ не обязательно является гомологическим многогранником, как показывает простой пример действия тора на чётномерной сфере. Это привело к введению нового понятия *гранеацикличного* многообразия с углами Q, в котором все грани по-прежнему ацикличны, но их пересечения уже не обязаны быть связными. Доказано, что $H^{odd}(M) = 0$ тогда и только тогда, когда пространство орбит Q является гранеацикличным. При этом кольцо эквивариантных когомологий оказывается изоморфным кольцу граней *симплициального частично упорядоченного множества* [24] граней Q. Таким образом в торической топологии возникает более широкий класс колец Коэна–Маколея, чем кольца Стенли–Райснера многогранников. Отметим, что эти кольца, вообще говоря, не порождаются элементами степени два.

Симплициальные частично упорядоченные множества и приложения к комбинаторной коммутативной алгебре. Комбинаторные структуры, возникающие в пространствах орбит многообразий с действием тора включают не только многогранники и симплициальные комплексы, но и более сложные объекты, такие как графы с метками или *симплициальные частично упорядоченные множества.* Изучение топологии действия тора в некоторых случаях приводит к новым интересным результатам об этих структурах чисто комбинаторной или алгебраической природы. В контексте симплициальных частично упорядоченных множеств этот подход был развит в недавних работах Бухштабера–Панова [3], Масуды [19] и Маэды–Масуды–Панова [18]. Для многих важных классов многообразий с действием тора информация о действии может быть целиком описана в комбинаторных терминах — регулярным n-валентным графом с векторными метками на рёбрах, который мы называем *тор-графом.* Важное семейство тор-графов возникает из пространств орбит тор-многообразий, что объясняет терминологию. По аналогии с теорией *ГКМ-графов*, восходящей к работам Горески–Коттвица–Макферсона [15] по симплектическим действиям тора, мы вводим в [18] понятие *эквивариантных когомологий* тор-графа, и показываем, что эти когомологии изоморфны кольцу граней ассоциированного симплициального частично упорядоченного множества. Это обобщает ряд предыдущих результатов об эквивариантных когомологиях тор-многообразий. В качестве основного комбинаторного приложения мы показываем, что симплициальное частично упорядоченное множество обладает свойством *Коэна–Маколея*, если его кольцо граней является кольцом Коэна–Маколея. Это завершает алгебраическую характеризацию частично упорядоченных множеств Коэна–Маколея, начатую Стенли в [24]. Мы также изучаем *раздутия* тор-графов и тор-многообразий с алгебраической и топологической точек зрения.

Полусвободные действия окружности и башни Ботта. *Башней Ботта* называется тотальное пространство башни расслоений над $\mathbb{C}P^1$ со слоями $\mathbb{C}P^1$. Каждая башня Ботта высоты n является гладким проективным торическим многообразием, для которого образ отображения моментов является многогранником, комбинаторно эквивалентным кубу. Действие окружности называется *полусвободным*, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек. В работе [21] мы показываем, что квазиторическое многообразие над кубом с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками является башней Ботта. Затем мы показываем, что такая башня Ботта топологически тривиальна, т.е. гомеоморфна произведению 2-мерных сфер. Это обобщает недавний результат Ильинского, согласно которому неособое компактное торическое многообразие с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками гомеоморфно произведению 2-мерных сфер, и является дальнейшим продвижением в проблеме Хаттори о полусвободных действиях окружности. Кроме того, мы показываем, что если кольцо когомологий квазиторического многообразия (или башни Ботта) изоморфно кольцу когомологий произведения 2-мерных сфер, то само многообразие гомеоморфно произведению.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора и комбинаторика многогранников.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **225** (1999), стр. 96–131; arXiv:math.AT/9909166.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора, комбинаторная топология и гомологическая алгебра.* Успехи мат. наук **55** (2000), вып. 5, стр. 3–106; arXiv:math.AT/0010073.

[3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **247** (2004), стр. 41–58.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004 (272 стр.).

[5] Т. Е. Панов. *Роды Хирцебруха многообразий с действием тора*, Известия РАН, сер. матем. **65** (2001), вып. 3, стр. 123–138.

[6] Michael F. Atiyah. *Convexity and commuting Hamiltonians.* Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.

[7] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*, revised edition. Cambridge Studies in Adv. Math., vol. 39, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[8] Victor M. Buchstaber and Nigel Ray. *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes.* Internat. Math. Res. Notices **4** (2001), 193–219.

[9] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Torus actions determined by simple polytopes*, in: “Geometry and Topology: Aarhus"(K. Grove, I. H. Madsen, and E. K. Pedersen, eds.). Contemporary Math., vol. **258**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 33–46.

[10] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus actions and their applications in topology and combinatorics.* University Lecture, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002 (152 pages).

[11] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds.* Moscow Math. J. (2007), to appear; arXiv:math.AT/0609346.

[12] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.

[13] Thomas Delzant. *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment.* Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339.

[14] J. Duistermaat and G. Heckman. *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* Invent. Math. **69** (1982), no. 2, 259–268.

[15] Mark Goresky, Robert Kottwitz and Robert MacPherson. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localisation theorem.* Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.

[16] Victor Guillemin and Catalin Zara. *Equivariant de Rham theory and graphs.* Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 49–76; arXiv:math.DG/9808135.

[17] Akio Hattori and Mikiya Masuda. *Theory of multi-fans.* Osaka J. Math. **40** (2003), 1–68; math.SG/0106229.

[18] Hiroshi Maeda, Mikiya Masuda and Taras Panov. *Torus graphs and simplicial posets.* Advances in Math. (2007), to appear; arXiv:math.AT/0511582.

[19] Mikiya Masuda. *h-vectors of Gorenstein* simplicial posets.* Advances in Math. **194** (2005), no. 2, 332–344; arXiv:math.CO/0305203.

[20] Mikiya Masuda and Taras Panov. *On the cohomology of torus manifolds.* Osaka J. Math. **43** (2006), 711–746; arXiv:math.AT/0306100.

[21] Mikiya Masuda and Taras Panov. *Semifree circle actions, Bott towers, and quasitoric manifolds.* Preprint; arXiv:math.AT/0607094.

[22] Taras E. Panov. *Topology of Kempf–Ness sets for algebraic torus actions*, in “Proceedings of the International Conference ‘Contemporary Geometry and Related Topics’ (Belgrade, 2005)”, to appear; arXiv:math.AG/0603556.

[23] Taras Panov, Nigel Ray and Rainer Vogt. *Colimits, Stanley–Reiner algebras, and loop spaces,* in: “Categorical Decomposition Techniques in Algebraic Topology (Isle of Skye, 2001)”, Progress in Math., vol. **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 261–291; arXiv:math.AT/0202081.

[24] Richard P. Stanley. *f-vectors and h-vectors of simplicial posets.* J. Pure Appl. Algebra. **71** (1991), 319–331.

[25] Richard P. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition. Progress in Math. **41**, Birkhäuser, Boston, 1996.