ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что пространство, двойственное к пространству $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов от одной переменной над $\mathbb{R}$, не изоморфно пространству $\mathbb{R}[t]$.
2. Докажите, что пространство $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ канонически изоморфно $V \oplus \overline{V}$, где $\overline{V}$ — комплексно сопряжённое пространство, в котором сложение то же, что и в V, а умножение на комплексные числа определено по формуле $\lambda \cdot \boldsymbol{v} := \overline{\lambda}\boldsymbol{v}$.
3. Найдите все инвариантные подпространства оператора, матрица которого есть жорданова клетка J_λ.
4. Докажите, что для любого оператора $\mathcal{A}$ существует оператор $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{ABA} = \mathcal{A}$.
5. Докажите, что в конечномерном пространстве над полем нулевой характеристики не существует операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, удовлетворяющих соотношению $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathrm{id}$. Существуют ли такие операторы над полем положительной характеристики?
6. Постройте пример операторов в бесконечномерном пространстве над $\mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathrm{id}$.
7. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — операторы. Докажите, что характеристические многочлены операторов $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ совпадают.
8. Докажите, что оператор $\mathrm{id} + \mathcal{AB}$ обратим тогда и только тогда, когда оператор $\mathrm{id} + \mathcal{BA}$ обратим.
9. Докажите, что если $\operatorname{tr} \mathcal{A}^k = 0$ для любого $k > 0$ над полем нулевой характеристики, то оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен.
10. Докажите, что если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ над полем нулевой характеристики удовлетворяют соотношению $\mathcal{A} = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$, то оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен.
11. Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в пространстве над $\mathbb{C}$ коммутируют, т.е. $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. Докажите, что они имеют общий собственный вектор.
12. Докажите, что проектор pr_{R_λ} на корневое подпространство R_λ оператора $\mathcal{A}$ является многочленом от оператора $\mathcal{A}$.
13. Докажите, что любой оператор $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{C}$ можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{N}$, где $\mathcal{D}$ — диагонализируемый оператор, а $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор, причём операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{N}$ коммутируют.
14. Докажите, что операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{N}$ из предыдущей задачи являются многочленами от $\mathcal{A}$.
15. Докажите, что если оператор $\mathcal{B}$ коммутирует с любым оператором, коммутирующим с $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$ есть многочлен от $\mathcal{A}$.
16. Докажите, что QR-разложение имеет место для любых прямоугольных матриц. А именно, Докажите, что любую вещественную матрицу A размера $m \times n$

можно представить в виде $A = QR$, где Q — ортогональная матрица размера $m \times m$, а $R = (r^i_j)$ — верхнетреугольная матрица размера $m \times n$ с неотрицательными числами на «диагонали» (т.е. $r^i_j = 0$ при $i > j$ и $r^i_i \geqslant 0$).

17. Докажите, что для любых линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ евклидова пространства найдётся такой вектор $\boldsymbol{b}$, что $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}) > 0$ для $i = 1, \ldots, k$.
18. Пусть подпространство W в $\mathbb{R}^n$ задано как линейная оболочка векторов: $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$, причём векторы-столбцы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно независимы. Найдите матрицу ортогонального проектора pr_W в стандартном базисе.
19. Докажите, что симметричная положительно определённая матрица A представляется в виде произведения $A = LR$, где L и R — соответственно нижнетреугольная и верхнетреугольная матрица.
20. Докажите, что для любого (не обязательно невырожденного) оператора $\mathcal{A}$ имеет место полярное разложение $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{U}$, где $\mathcal{P}$ — неотрицательный самосопряжённый оператор, а $\mathcal{U}$ — ортогональный (унитарный) оператор.
21. Докажите, что в полярных разложениях $\mathcal{A} = \mathcal{P}_1\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2\mathcal{P}_2$ невырожденного оператора $\mathcal{A}$ ортогональные (унитарные) операторы $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ совпадают.
22. Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — нормальный оператор (т.е. $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$) и W — инвариантное подпространство. Верно ли, что $W^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$?
23. Докажите, что для нормального оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором его матрица состоит из блоков размера 1 или 2, причём блоки размера 2 имеют вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
24. Пусть билинейная функция $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию: $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$. Докажите, что $\mathcal{B}$ либо симметрична, либо кососимметрична.
25. Приведите пример симметрической билинейная функции над полем $\mathbb{Z}_2$, которая не приводится к диагональному виду заменой базиса.
26. Приведите пример пары симметрических билинейных форм, которые нельзя привести к диагональному виду одним преобразованием.
27. Пусть ξ, η — ненулевые линейные функции. Найдите ранг билинейной формы $\xi \otimes \eta$.
28. Найдите размерность пространства симметрических тензоров $\mathrm{S}_p(V)$.
29. Пусть $\xi^1, \ldots, \xi^p \in V^* = \Lambda_1(V)$. Докажите, что $\xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^p = 0$ тогда и только тогда, когда ковекторы $\xi^1, \ldots, \xi^p$ линейно зависимы.
30. Внешняя 2-форма $T = \sum_{i<j} T_{ij}\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j$ называется *разложимой*, если $T = \xi \wedge \eta$ для некоторых линейных функций (1-форм) ξ и η. Докажите, что внешняя 2-форма разложима тогда и только тогда, когда ранг соответствующей кососимметрической билинейной функции не превосходит 2.
31. Докажите, что определитель $\det B$ кососимметрической матрицы $B = (b_{ij})$ как многочлен от её элементов b_{ij} является квадратом другого многочлена $\mathrm{pf}\, B$ с целыми коэффициентами: $\det B = (\mathrm{pf}\, B)^2$. Многочлен $\mathrm{pf}\, B$ называется *пфаффианом* матрицы B.

32. Докажите формулу изменения пфаффиана при замене базиса: если $B' = C^t B C$, то $\operatorname{pf} B' = \det C \operatorname{pf} B$.
33. Найдите явный вид многочлена $\operatorname{pf} B$ от элементов b_{ij}.
34. Пусть $\mathcal{B}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ — невырожденная кососимметрическая билинейная функция, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ — оператор, сохраняющий эту функцию, т.е. $\mathcal{B}(\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Докажите, что $\det \mathcal{A} = 1$.