Введение в топологию

Лекция 14

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

9 декабря 2021 г.

Классификация накрытий

Два накрытия $p_1\colon Y_1 \to X$ и $p_2\colon Y_2 \to X$ изоморфны, если существует такой гомеоморфизм $f\colon Y_1 \to Y_2$, что $p_1 = p_2 f$.

Теорема

Пусть X — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфных накрытий $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ (с сохранением отмеченной точки) и множеством подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$. При этом соответствии накрытие p переходит в подгруппу $p_*\pi_1(Y, y_0)$.

Доказательство

Сначала покажем, что для любой подгруппы $H \subset \pi_1(X, x_0)$ существует такое накрытие $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$, что $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$.

Напомним конструкцию универсального (односвязного) накрытия:

$$\widetilde{X} = \{[\gamma]\colon \gamma \text{ путь в } X\text{, выходящий из точки } x_0\}.$$

В качестве базы топологии на $\widetilde{X}$ мы выбирали множества вида

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta]\colon \eta \text{ — путь в } U\text{, для которого } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Зададим следующее отношение эквивалентности на $\widetilde{X}$:

$$[\gamma] \sim [\gamma'], \text{ если } \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ и } [\gamma][\gamma']^{-1} \in H.$$

Положим $Y = \widetilde{X}/\sim$. Заметим, что если $\gamma(1) = \gamma'(1)$, то $[\gamma] \sim [\gamma']$ тогда и только тогда, когда $[\gamma\eta] \sim [\gamma'\eta]$. Это означает, что если какие-либо две точки в $U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma']}$ отождествляются в Y, то $U_{[\gamma]}$ и $U_{[\gamma']}$ отождествляются целиком. Следовательно, проекция $p\colon \widetilde{X}/\sim = Y \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, является накрытием.

Доказательство (продолжение)

Возьмём в качестве отмеченной точки $y_0 \in Y$ класс эквивалентности $[x_0]$ постоянного пути в точке x_0. Тогда $p_*\pi_1(Y, y_0) = H$.

Действительно, для петли γ в (X, x_0) её поднятие в $\widetilde{X}$, начинающееся в $[x_0]$, заканчивается в $[\gamma]$, поэтому образ этого поднятого пути в $Y = \widetilde{X}/{\sim}$ будет петлёй тогда и только тогда, когда $[\gamma] \sim [x_0]$, а это эквивалентно тому, что $[\gamma] \in H$.

Доказательство (окончание).

Теперь докажем, что два накрытия $p_1\colon (Y_1, y_1) \to (X, x_0)$ и $p_2\colon (Y_2, y_2) \to (X, x_0)$, для которых $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$, изоморфны.

Действительно, по теореме о поднятии отображения мы можем поднять p_1 до отображения $\widetilde{p}_1\colon (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$, для которого $p_2\widetilde{p}_1 = p_1$. Аналогично получаем $\widetilde{p}_2\colon (Y_2, y_2) \to (Y_1, y_1)$, для которого $p_1\widetilde{p}_2 = p_2$. Тогда согласно единственности поднятия мы имеем $\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2 = \mathrm{id}$ и $\widetilde{p}_2\widetilde{p}_1 = \mathrm{id}$. Таким образом, $\widetilde{p}_1$ и $\widetilde{p}_2$ — обратные изоморфизмы. $\square$

Графы, свободные группы и теорема Нильсена–Шрайера

В качестве приложения теории накрытий мы докажем важную алгебраическую теорему о том, что подгруппа свободной группы свободна. Доказательство будет использовать ряд фактов из теории графов, которые мы легко докажем, используя результаты о клеточных пространствах.

Графом называется одномерное клеточное пространство X. Нульмерные клетки называются **вершинами** графа X, а одномерные клетки — его **рёбрами**.

Подграф графа X — это клеточное подпространство $Y \subset X$ (замкнутое подмножество, которое является объединением вершин и рёбер). **Дерево** — это стягиваемый граф. Подграф-дерево в X называют **максимальным**, если оно содержит все вершины графа X. Как мы увидим ниже, это эквивалентно более очевидному определению максимальности.

Предложение

Любой связный граф X содержит максимальное дерево, и любое дерево в графе содержится в некотором максимальном дереве.

Доказательство

Мы опишем конструкцию, которая для каждого подграфа $X_0 \subset X$ даёт подграф $Y \subset X$, содержащий все вершины графа X, и деформационную ретракцию $Y \overset{\simeq}{\to} X_0$. В частности, взяв в качестве X_0 одну вершину или любое поддерево, мы получим требуемое утверждение.

Вначале построим последовательность подграфов $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, где X_{i+1} получается из X_i добавлением замыканий $\overline{e}_\alpha$ всех рёбер $e_\alpha \subset X \setminus X_i$, имеющих по крайней мере один конец в X_i. Объединение $\bigcup_i X_i$ открыто в X, так как каждая точка из X_i имеет окрестность, содержащуюся в X_{i+1}. Более того, множество $\bigcup_i X_i$ замкнуто по аксиоме (W) клеточного пространства, как объединение замыканий клеток. Поэтому $X = \bigcup_i X_i$, так как граф X связен.

Доказательство (окончание).

Теперь, чтобы построить Y, положим вначале $Y_0 = X_0$. Предположим по индукции, что уже построен граф $Y_i \subset X_i$, содержащий все вершины графа X_i. Рассмотрим граф Y_{i+1}, который получается из Y_i путём добавления для каждой вершины из $X_{i+1} \setminus X_i$ одного ребра, соединяющего эту вершину с Y_i. Очевидно, что имеется деформационная ретракция $Y_{i+1} \stackrel{\simeq}{\to} Y_i$.

Теперь положим $Y = \bigcup_i Y_i$. Тогда можно получить деформационную ретракцию графа Y на $Y_0 = X_0$, деформационно ретрагируя Y_{i+1} на Y_i в течение времени из промежутка $[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]$. Тогда точка $x \in Y_{i+1} \setminus Y_i$ остаётся неподвижной до этого промежутка, во время которого она перемещается в Y_i, а после этого продолжает перемещаться, пока не достигнет Y_0. Полученная гомотопия $h_t \colon Y \to Y$ непрерывна, так как она непрерывна на замыкании каждого ребра. □

Предложение

Пусть X — связный граф с максимальным деревом T. Тогда $\pi_1(X)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют ребрам из $X \setminus T$.

Доказательство.

Проекция $X \to X/T$ является гомотопической эквивалентностью, так как T стягиваемо. Факторпространство X/T является графом с одной вершиной, а потому является букетом окружностей. Поэтому $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/T)$ — свободная группа с базисом, элементы которого соответствуют рёбрам, не попавшим в T. □

Следствие

Граф является деревом тогда и только тогда, когда он односвязен.

Лемма

Любое накрывающее пространство графа X также является графом.

Доказательство.

Пусть $p\colon Y \to X$ — накрытие. В качестве вершин графа Y мы берём дискретное множество $Y^0 = p^{-1}(X^0)$. В качестве ребёр графа Y мы берём всевозможные поднятия характеристических отображений $I_\alpha \to X$ одномерных клеток e_α пространства X (т. е. ребёр графа X). Такие поднятия начинаются и заканчиваются в точках из Y^0, причём для каждой точки из $p^{-1}(x)$, где $x \in e_\alpha$, существует единственное поднятие, проходящее через эту точку. Это задаёт структуру графа на Y. Получающаяся при этом топология на Y — та же самая, что и исходная топология, так как обе топологии имеют одни и те же базовые открытые множества, поскольку проекция $p\colon Y \to X$ является локальным гомеоморфизмом. $\square$

Теорема

Любая подгруппа свободной группы F свободна.

Доказательство.

Пусть X — граф, для которого $\pi_1(X) = F$, например, букет окружностей. Для каждой подгруппы $G \subset F$ существует накрытие $p\colon Y \to X$, для которого $p_*\pi_1(Y) = G$, т. е. $\pi_1(Y) \cong G$, так как p_* инъективно. По предыдущей лемме Y — граф, поэтому группа $G \cong \pi_1(Y)$ свободна. $\square$

В отличие от ситуации со свободными абелевым группами, подгруппа $G \subset F$ свободной группы F может иметь больший ранг, чем группа F. Примеры приведены в задачах ниже.

Задача

Постройте накрытие букета 2 окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету n окружностей для любого n. Это даст подгруппу в свободной группе F_2, изоморфную F_n.

Задача

Пусть $G = [F_2, F_2] \subset F_2$ — коммутант свободной группы ранга 2. Докажите, что G — свободная группа бесконечного ранга. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующие подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.