Введение в топологию

Лекция 13

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

2 декабря 2021 г.

Теорема о поднятии отображений

Выясним, как обстоит дело с поднятием произвольных отображений, а не только гомотопий.

Пространство X называется локально линейно связным, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x найдётся линейно связная окрестность $V \subset U$.

Теорема (о поднятии отображения)

Пусть $p\colon(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ *— накрытие и* $f\colon(Z,z_0)\to(X,x_0)$ *— отображение из линейно связного пространства* Z *с отмеченной точкой* z_0*.*

а) *Существует не более одного отображения* $\widetilde{f}\colon(Z,z_0)\to(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$*, такого, что* $p\circ\widetilde{f}=f$ *(поднятия).*

б) *Если* Z *локально линейно связно, то для существования поднятия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение*

$$f_*\pi_1(Z,z_0)\subset p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0).$$

Доказательство

Докажем а). Пусть $\widetilde{f}$ и $\widetilde{f}'$ — два поднятия. Если $z\in Z$ — произвольная точка и $\gamma\colon I\to Z$ — путь из z_0 в z, то пути $\widetilde{f}\gamma$ и $\widetilde{f}'\gamma$ накрывают путь $f\gamma$ и имеют общее начало, вследствие чего они совпадают. Поэтому $\widetilde{f}(z)=(\widetilde{f}\gamma)(1)=(\widetilde{f}'\gamma)(1)=\widetilde{f}'(z)$.

Доказательство (продолжение)

Теперь докажем б). Мы можем попытаться построить отображение $\widetilde{f}\colon (Z, z_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ следующим образом. Пусть $z \in Z$. Возьмём путь $\gamma\colon I \to Z$ из z_0 в z и для пути $f\gamma\colon I \to X$ построим поднятие $\widetilde{f\gamma}\colon I \to \widetilde{X}$ с началом в точке $\widetilde{x}_0$. Затем положим $\widetilde{f}(z) = \widetilde{f\gamma}(1)$.

Для того, чтобы эта конструкция была корректной, необходимо и достаточно, чтобы для любого другого пути $\gamma'\colon I \to Z$ из z_0 в z, соответствующий путь $\widetilde{f\gamma'}$ заканчивался в той же точке, что и $\widetilde{f\gamma}$, т. е. чтобы петля $f \circ (\gamma\overline{\gamma}')$ накрывалась в $\widetilde{X}$ петлёй. Это равносильно условию $f_*\pi_1(Z, z_0) \subset p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

Доказательство (окончание).

Кроме того, необходимо проверить непрерывность отображения $\widetilde{f}\colon (Z,z_0)\to(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$. Пусть $\widetilde{U}\subset\widetilde{X}$ — окрестность точки $\widetilde{f}(z)$. Перейдя, если необходимо, к меньшей окрестности, мы можем считать, что $p\colon \widetilde{U}\to U$ — гомеоморфизм на некоторую окрестность U точки $f(z)\subset X$. Выберем линейно связную окрестность V точки z, для которой $f(V)\subset U$. В качестве путей из z_0 в разные точки $z'\subset V$ можно взять фиксированный путь γ из z_0 в z, который продолжается разными путями η в V из точки z в z'. Тогда пути $(f\gamma)\cdot(f\eta)$ в X имеют поднятия $(\widetilde{f\gamma})\cdot(\widetilde{f\eta})$, где $\widetilde{f\eta}=p^{-1}(f\eta)$ и $p^{-1}\colon U\to\widetilde{U}$ — отображение, обратное к $p\colon\widetilde{U}\to U$. Таким образом, $\widetilde{f}(V)\subset\widetilde{U}$, поэтому отображение $\widetilde{f}$ непрерывно в точке z. □

Универсальное накрытие

Так как отображение $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ является мономорфизмом, возникает вопрос, любая ли подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$ реализуется в виде $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ для некоторого накрытия $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$.

Ниже мы увидим, что ответ на этот вопрос положителен. Вначале рассмотрим вопрос о реализуемости тривиальной подгруппы $\{e\}$. Так как p_* — мономорфизм, это сводится в вопросу о существовании односвязного накрывающего пространства для X.

Пространство X называется полулокально односвязным, если для любой точки $x \in X$ и её окрестности $V \ni x$ существует меньшая окрестность $U \subset V$, такая, что индуцированное включением отображение $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ тривиально. Открытые множества U с этим свойством образуют базу топологии полулокально односвязного пространства X.

Теорема

Пусть X — линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное пространство. Тогда существует накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ с односвязным $\widetilde{X}$.

Доказательство

Пусть $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие с односвязным $\widetilde{X}$. Тогда любую точку $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ можно соединить путём с $\widetilde{x}_0$, и этот путь единствен с точностью до гомотопии. Поэтому $\widetilde{X}$ можно отождествить с множеством гомотопических классов путей в $\widetilde{X}$ с фиксированным началом $\widetilde{x}_0$. С другой стороны, такие гомотопические классы — это в точности гомотопические классы путей в X с фиксированным началом x_0, в силу единственности поднятия путей. Мы приходим к следующему определению:

$$\widetilde{X} = \{[\gamma]\colon \gamma \text{ путь в } X, \text{ выходящий из точки } x_0\}.$$

Доказательство (продолжение)

$$\widetilde{X} = \{[\gamma] \colon \gamma \text{ путь в } X, \text{ выходящий из точки } x_0\},$$

где, как обычно, $[\gamma]$ обозначает гомотопический класс пути γ относительно гомотопий, которые оставляют начало и конец пути неподвижными. Мы имеем отображение

$$p \colon \widetilde{X} \to X, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(1).$$

Так как X линейно связно, конец $\gamma(1)$ может быть любой точкой в X, поэтому отображение p сюръективно. Ниже мы введём топологию на $\widetilde{X}$, докажем, что $p \colon \widetilde{X} \to X$ — накрытие, а $\widetilde{X}$ односвязно.

Доказательство (продолжение)

Рассмотрим $\mathcal{U}$ — набор всех таких линейно связных открытых подмножеств $U \subset X$, что отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально. Так как X локально линейно связно и полулокально односвязно, $\mathcal{U}$ — база топологии на X (т. е. любое открытое множество из X представляется в виде объединения множеств из $\mathcal{U}$).

Пусть даны $U \subset \mathcal{U}$ и путь γ в X из x_0 в некоторую точку в U. Положим

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta] \colon \eta \text{ — путь в } U, \text{ для которого } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

Отображение $p \colon U_{[\gamma]} \to U$ сюръективно, так как U линейно связно, и инъективно, так как все пути η из $\gamma(1)$ в $x \in U$ гомотопны в X, поскольку отображение $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ тривиально.

Свойство: $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$, *если* $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$.

Действительно, если $\gamma' = \gamma \cdot \eta$, то элементы множества $U_{[\gamma']}$ имеют вид $[\gamma \cdot \eta \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma]}$. Аналогично, элементы множества $U_{[\gamma]}$ имеют вид $[\gamma \cdot \mu] = [\gamma \cdot \eta \cdot \overline{\eta} \cdot \mu] = [\gamma' \cdot \overline{\eta} \cdot \mu]$ и потому лежат в $U_{[\gamma']}$.

Доказательство (продолжение)

Мы зададим топологию на $\widetilde{X}$, взяв в качестве базы набор множеств $U_{[\gamma]}$. Чтобы проверить, что этот набор можно взять в качестве базы, нужно доказать, что в любом пересечении $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ содержится множество такого вида. Пусть $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Тогда $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$ и $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$. Пусть $W \in \mathcal{U}$ содержится в $U \cap V$ и содержит $\gamma''(1)$. Тогда $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$.

Взаимно однозначное отображение $p\colon U_{[\gamma]} \to U$ является гомеоморфизмом, так как оно задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma']}$ и множествами $V \in \mathcal{U}$, содержащимися в U. Следовательно, отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$ непрерывно. Оно является накрытием, так как для фиксированного $U \in \mathcal{U}$ множества $U_{[\gamma]}$ для разных $[\gamma]$ задают разбиение $p^{-1}(U)$ на непересекающиеся множества, потому что если $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$, то $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']} = U_{[\gamma'']}$ по свойству выше.

Доказательство (окончание).

Остаётся показать, что $\widetilde{X}$ односвязно. Для данной точки $[\gamma] \in \widetilde{X}$ пусть γ_t — путь в X, который совпадает с γ на $[0, t]$ и остаётся в одной и той же точке $\gamma(t)$ на $[t, 1]$. Тогда отображение $t \mapsto [\gamma_t]$ есть путь в $\widetilde{X}$, который является поднятием пути γ, начинается в $[x_0]$ (гомотопическом классе постоянного пути в x_0) и заканчивается в $[\gamma]$. Так как $[\gamma] \in \widetilde{X}$ — произвольная точка, это показывает, что $\widetilde{X}$ линейно связно.

Чтобы проверить, что $\pi_1(\widetilde{X}, [x_0]) = 0$, достаточно показать, что $p_*\pi_1(\widetilde{X}, [x_0]) = 0$. Элементы в образе гомоморфизма p_* представлены петлями γ в (X, x_0), которые поднимаются до петель в $(\widetilde{X}, [x_0])$. Мы уже отметили, что путь $t \mapsto [\gamma_t]$ является поднятием пути γ и начинается в $[x_0]$. То, что этот путь является петлёй, означает, что $[\gamma] = [x_0]$. Следовательно, петля γ стягиваема и образ гомоморфизма p_* тривиален. $\square$

Предложение

Пусть $p\colon \widetilde{X} \to X$ *— накрытие с односвязным* $\widetilde{X}$*. Тогда для любого другого накрытия* $q\colon Y \to X$ *имеется накрытие* $r\colon \widetilde{X} \to Y$*, такое, что* $q \circ r = p$*.*

Доказательство.

Это следует из теоремы о поднятии отображения. $\square$

Благодаря этому свойству накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ с односвязным $\widetilde{X}$ называется универсальным накрытием над X. Из теоремы классификации накрытий, которую мы докажем далее, следует, что универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

Пример

Отображение $S^n \to \mathbb{R}P^n$, переводящую точку единичной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в прямую, соединяющую эту точку и 0, является универсальным накрытием при $n \geqslant 2$. Так как это накрытие двулистно, тривиальная подгруппа имеет индекс 2 в $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. Поэтому $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ при $n \geqslant 2$.