Введение в топологию

Лекция 12

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

25 ноября 2021 г.

Накрытия

Линейно связное пространство $\widetilde{X}$ называется накрывающим пространством для линейно связного пространства X, если задано отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$, такое, что у любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \varGamma$, где $\varGamma$ — дискретное множество, причём диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \varGamma \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Другими словами, $p^{-1}(U)$ является объединением непересекающихся открытых множеств в $\widetilde{X}$, каждое из которых p гомеоморфно отображает на U. Отображение $p\colon \widetilde{X} \to X$ называется накрытием.

Пример

1. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Это накрытие использовалось при доказательстве изоморфизма $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

2. $p\colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, где окружность S^1 задана как $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

3. Отображение $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$, которое переводит точку сферы в прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящую через эту точку и 0.

Ясно, что если $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X_1$ и $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X_2$ — накрытия, то и $p_1 \times p_2 : \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ — накрытие.

В частности, квадрат накрытия из примера 1 выше даёт накрытие $\mathbb{R}^2 \to T^2$ тора $T^2 = S^1 \times S^1$ плоскостью.

Свойство поднятия гомотопии

Говорят, что отображение $p\colon Y \to X$ обладает свойством поднятия гомотопии (covering homotopy property, CHP) по отношению к пространству Z, если для любого отображения $f: Z \to Y$ и гомотопии $F\colon Z \times I \to X$, такой, что $p \circ f = F_0$, существует накрывающая гомотопия $\widetilde{F}\colon Z \times I \to Y$, для которой $\widetilde{F}_0 = f$ и $p \circ \widetilde{F} = F$. Это описывается следующей диаграммой:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] & X
\end{tikzcd}
$$

где i_0 — вложение $z \mapsto (z, 0)$.

Ниже мы покажем, что накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ обладают свойством поднятия гомотопии, причём накрывающая гомотопия единственна. При $Z = pt$ свойство поднятия гомотопии превращается в свойство поднятия путей.

Лемма

Для любого пути $\gamma\colon I \to X$ и любой точки $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, такой, что $p(\widetilde{x}) = \gamma(0)$, существует единственный путь $\widetilde{\gamma}\colon I \to \widetilde{X}$, такой, что $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}$ и $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

Доказательство.

Окрестности из определения накрытия мы будем называть элементарными. Для каждого $t \in I$ найдём элементарную окрестность $U(t) \subset X$ точки $\gamma(t)$. В силу компактности отрезка I из этих окрестностей можно выбрать последовательность $U_1, \ldots, U_N$ так, что $U_i \supset \gamma(t_i, t_{i+1})$, где $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{N+1} = 1$. Прообраз $p^{-1}(U_1)$ гомеоморфен дискретному набору таких же окрестностей. Пусть $\widetilde{U}_1$ — та из них, которая содержит точку $\widetilde{x}$. Определим $\widetilde{\gamma}\colon [0, t_2] \to \widetilde{U}_1$ как прообраз куска $\gamma|_{[0,t_2]}$ пути γ от $0 = t_1$ до t_2, который попадает в U_1. Затем проделаем то же самое с окрестностью U_2, точкой $\widetilde{\gamma}(t_2)$ и куском пути $\gamma|_{[t_2,t_3]}$ и т. д. Так как число окрестностей конечно, то процесс конечен, а так как для каждой окрестности он однозначен, то путь с нужными свойствами существует только один. □

Теорема (о поднятии гомотопии)

Накрытие $p\colon \widetilde{X} \to X$ обладает свойством поднятия гомотопии по отношению к любому пространству Z, причём накрывающая гомотопия $\widetilde{F}\colon Z \times I \to \widetilde{X}$ единственна.

Доказательство

Пусть даны отображение $f\colon Z \to \widetilde{X}$ и гомотопия $F\colon Z \times I \to X$. Перейдя к сопряжённому, получаем отображение $F'\colon Z \to X^I$, переводящее точку $z \in Z$ в путь $t \mapsto F(z,t)$ в пространстве X. В силу предыдущей леммы, этот путь единственным образом поднимается до пути в $\widetilde{X}$, который начинается в точке $f(z) \in \widetilde{X}$. Таким образом, существует единственное отображение $\widetilde{F}'\colon Z \to \widetilde{X}^I$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} & \widetilde{X}^I \arrow[l, "p_0"'] \arrow[d] \\
Z \arrow[u, "f"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}'"] & X^I,
\end{tikzcd}$$

где p_0 — отображение, сопоставляющее пути его начальную точку.

Доказательство (окончание).

Переходя обратно от сопряжённых отображений к исходным, получим

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{X} & \widetilde{X}^I \arrow[l, "p_0"'] \arrow[d] \\
Z \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}'"] \arrow[r, "F'"'] & X^I
\end{tikzcd}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"'] & X.
\end{tikzcd}
$$

Диаграмма справа и выражает требуемое свойство поднятия гомотопии с единственной накрывающей гомотопией.

Необходимо проверить непрерывность построенных отображений $\widetilde{F}'$ и $\widetilde{F}$; это будет следовать из более общей теоремы о поднятии отображения, доказываемой ниже. □

Накрытия и фундаментальная группа

Теорема

Гомоморфизм

$$p_*\colon \pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0),$$

индуцированный накрытием $p\colon(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$, *является мономорфизмом.*

Подгруппа $p_*\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ *в* $\pi_1(X,x_0)$ *состоит из гомотопических классов петель в* X *с началом в* x_0, *поднятия которых в* $\widetilde{X}$ *с началом в* $\widetilde{x}_0$ *являются петлями.*

Доказательство

Надо доказать, что если петля $\widetilde{\varphi}\colon I \to \widetilde{X}$ с началом $\widetilde{x}_0$ проектируется в петлю $\varphi\colon I \to X$, гомотопную нулю (т. е. гомотопную постоянной петле), то и сама петля $\widetilde{\varphi}$ гомотопна нулю. Фиксируем гомотопию $\varphi_t\colon I \to X$, такую, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$, $\varphi_1(I) = x_0$. По теореме о поднятии гомотопии существует гомотопия $\widetilde{\varphi}_t\colon I \to \widetilde{X}$, такая, что $\widetilde{\varphi}_0 = \widetilde{\varphi}$ и $p \circ \widetilde{\varphi}_t = \varphi_t$. Таким образом, для любого $t \in [0,1]$ петля $\varphi_t\colon I \to X$ поднимается до пути $\widetilde{\varphi}_t\colon I \to \widetilde{X}$. При изменении t начало $\widetilde{\varphi}_t(0)$ поднятого пути проходит некоторый путь в слое $p^{-1}(x_0)$ над x_0. Но так как слой — дискретное пространство, этот путь в слое постоянен (непрерывное отображение из связного пространства I в дискретное пространство является постоянным). Поэтому $\widetilde{\varphi}_t(0) = \widetilde{\varphi}(0) = \widetilde{x}_0$. Аналогично $\widetilde{\varphi}_t(1) = \widetilde{\varphi}(1) = \widetilde{x}_0$. Наконец, $\widetilde{\varphi}_1(I) = \widetilde{x}_0$ по тем же соображениям ($\widetilde{\varphi}_1$ есть непрерывное отображение из I в $p^{-1}(x_0)$). Таким образом, $\widetilde{\varphi}_t\colon I \to \widetilde{X}$ есть гомотопия петли $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0$ в постоянную петлю $\widetilde{\varphi}_1$.

Доказательство (окончание).

Докажем теперь второе утверждение. Петли с началом и концом в x_0, поднимающиеся до петель с началом и концом в $\widetilde{x}_0$, очевидно, представляют элементы образа отображения $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Наоборот, петля, представляющая элемент образа отображения p_*, гомотопна петле, у которой есть такое поднятие, поэтому согласно свойству поднятия гомотопии и у неё самой должно быть такое поднятие. $\square$

Напомним, что **индексом** подгруппы $H \subset G$ называется называется мощность множества смежных классов Hg, $g \in G$.

Если H — нормальная подгруппа, то индекс H в G — это порядок фактор-группы G/H.

Предложение

Число точек в прообразе $p^{-1}(x_0)$ при накрытии $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ равно индексу подгруппы $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ в $\pi_1(X, x_0)$.

Доказательство.

Пусть $H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Для петли φ в X с началом и концом в x_0, пусть $\widetilde{\varphi}$ — её поднятие в $\widetilde{X}$, начинающееся в точке $\widetilde{x}_0$. Определим отображение Φ из множества смежных классов

$$\Phi\colon \{H[\varphi],\, [\varphi] \in \pi_1(X, x_0)\} \to p^{-1}(x_0), \quad H[\varphi] \mapsto \widetilde{\varphi}(1).$$

Это отображение определено корректно, так как произведение $\psi \cdot \varphi$, где $[\psi] \in H$, имеет поднятие $\widetilde{\psi} \cdot \widetilde{\varphi}$, заканчивающееся в то же точке, что и $\widetilde{\varphi}$, так как $\widetilde{\psi}$ — петля.

Из линейной связности пространства $\widetilde{X}$ следует, что Φ сюръективно, так как точку $\widetilde{x}_0$ можно соединить с любой точкой в $p^{-1}(x_0)$ путём $\widetilde{\varphi}$, проектирующимся в петлю φ с началом и концом в x_0.

Кроме того, Φ инъективно: из равенства $\Phi(H[\varphi]) = \Phi(H[\varphi'])$ следует, что $\varphi \cdot \overline{\varphi}'$ поднимается до петли в $\widetilde{X}$ с началом и концом в $\widetilde{x}_0$, поэтому $[\varphi][\varphi']^{-1} \in H$, а значит, $H[\varphi] = H[\varphi']$. Итак, Φ — биекция. $\square$