Введение в топологию

Лекция 11

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

18 ноября 2021 г.

Теорема (ван Кампен)

Пусть X — объединение линейно связных открытых множеств A_α, каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$.

а) *Если каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связно, то $\Phi\colon *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ является эпиморфизмом.*

б) *Если, кроме того, каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ линейно связно, то ядро гомоморфизма Φ — это нормальная подгруппа N, порождённая всеми элементами вида $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, а потому Φ индуцирует изоморфизм*

$$\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N.$$

Сформулируем отдельно частный случай теоремы ван Кампена, когда покрытие пространства X состоит всего из двух множеств, $X = A \cup B$. В этом случае условие пункта б) теоремы выполнено автоматически. Кроме того, не нужно требовать, чтобы каждое из множеств A и B содержало отмеченную точку, так её можно выбрать в $A \cap B$.

Следствие

Пусть $X = A \cup B$, где множества A и B, а также их пересечение $A \cap B$, открыты и линейно связны. Тогда

$$\pi_1(X) \cong \big(\pi_1(A) * \pi_1(B)\big)/N,$$

где N — нормальная подгруппа, порождённая элементами вида $i_{AB}(\omega)i_{BA}(\omega)^{-1}$, $\omega \in \pi_1(A \cap B)$, а $i_{AB}\colon \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$ и $i_{BA}\colon \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(B)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями $A \cap B \hookrightarrow A$ и $A \cap B \hookrightarrow B$.

Группа $\big(\pi_1(A) * \pi_1(B)\big)/N$ называется **амальгамированным произведением** групп $\pi_1(A)$ и $\pi_1(B)$ над $\pi_1(A \cap B)$.

Мы также получаем описание фундаментальной группы букета $\bigvee_\alpha X_\alpha$ пространств X_α с отмеченными точками x_α.

Следствие

Если каждая точка $x_\alpha \in X_\alpha$ является деформационным ретрактом своей окрестности $U_\alpha \subset X_\alpha$, то имеет место изоморфизм

$$\pi_1\bigl(\bigvee_\alpha X_\alpha\bigr) \cong \mathop{*}_\alpha \pi_1(X_\alpha).$$

В частности, для букета окружностей группа $\pi_1(\bigvee_\alpha S^1)$ свободная.

Доказательство.

Каждое пространство X_α является деформационным ретрактом своей окрестности $A_\alpha = X_\alpha \vee \bigvee_{\beta\neq\alpha} U_\beta \subset \bigvee_\alpha X_\alpha$. Пересечение двух и более различных множеств A_α — это пространство $\bigvee_\alpha U_\alpha$, которое стягиваемо. Тогда из теоремы ван Кампена следует, что $\Phi\colon *_\alpha\,\pi_1(X_\alpha) \to \pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ — изоморфизм. □

Фундаментальная группа клеточного пространства

Теперь мы научимся задавать фундаментальные группы клеточных пространств образующими и соотношениями. Это позволит нам явно вычислять фундаментальную группу, задав клеточную структуру.

Вначале выведем ещё одно важное следствие теоремы о клеточной аппроксимации.

Предложение

Линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной 0-мерной клеткой.

Доказательство.

Выберем в X нульмерную клетку e_0 и соединим её путём γ_i с каждой другой нульмерной клеткой e_i (пути могут пересекаться). Используя теорему о клеточной аппроксимации, мы можем добиться того, чтобы $\gamma_i \subset X^1$. Для каждого i приклеим к X двумерный диск по отображению нижней полуокружности в X при помощи пути γ_i. Получим новое клеточное пространство $\widetilde{X}$, которое содержит X и, кроме того, клетки e_i^1, e_i^2 (верхние полуокружности и внутренности приклеенных дисков).

Ясно, что X есть деформационный ретракт в $\widetilde{X}$: каждый приклеенный диск можно стянуть на нижнюю полуокружность. Обозначим через Y объединение замыканий клеток e_i^1 (верхних полуокружностей). Очевидно, Y стягиваемо. Следовательно, $\widetilde{X}/Y \simeq \widetilde{X} \simeq X$. Но у $\widetilde{X}/Y$ всего одна нульмерная клетка. $\square$

Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0. Отображение $\varphi\colon S^1 \to X$, переводящее отмеченную точку 0 окружности в x_0, можно рассматривать как петлю в (X, x_0), и поэтому оно задаёт элемент $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$.

Если же отображение $\varphi\colon S^1 \to X$ переводит 0 в какую-то другую точку $\varphi(0)$, то мы получаем элемент группы $\pi_1(X, \varphi(0))$, которая связана с $\pi_1(X, x_0)$ неканоническим изоморфизмом. Таким образом, произвольное отображение $\varphi\colon S^1 \to X$ задаёт элемент группы $\pi_1(X, x_0)$, заданный с точностью до сопряжения.

Пусть X — клеточное пространство с единственной 0-мерной клеткой $e^0 = x_0$, одномерными клетками e^1_i, $i \in I$, и двумерными клетками e^2_j, $j \in J$. Характеристические отображения $D^2 \to X$ двумерных клеток определяют отображения приклеивания $f_j\colon S^1 \to X^1$, которые задают элементы $\beta_j \in \pi_1(X^1)$ с точностью до сопряжения. При этом X^1 — это букет окружностей $\overline{e}^1_i$ и группа $\pi_1(X^1, x_0)$ есть свободная группа с множеством образующих I.

Теорема

Группа $\pi_1(X, x_0)$ *изоморфна факторгруппе свободной группы* $\pi_1(X^1, x_0)$ *с образующими, отвечающими 1-мерным клеткам, по соотношениям* $\beta_j = 1$, $j \in J$, *отвечающим 2-мерным клеткам.*

Доказательство

Проведём доказательство по индукции по приклеиваемым клеткам размерности $n \geqslant 2$. Если таких клеток нет, то пространство $X = X^1$ — букет сфер и $\pi_1(X)$ — свободная группа с образующими, отвечающими 1-мерным клеткам.

Доказательство (продолжение)

Пусть $X' = X \cup_f D^n$ получено из X приклеиванием n-мерной клетки e^n при помощи отображения $f\colon S^{n-1} \to X$, т. е. мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X' \end{array}$$

Внутри клетки e^n выберем точку y.

Пусть $A = X' \setminus \{y\}$ и $B = X' \setminus X$. Тогда A деформационно ретрагируется на X, а B стягиваемо. Теперь применим теорему ван Кампена к покрытию $X' = A \cup B$. Так как $\pi_1(A) = \pi_1(X)$, а $\pi_1(B) = \{1\}$, мы получаем, что $\pi_1(X')$ изоморфно факторгруппе группы $\pi_1(A) * \pi_1(B) = \pi_1(X)$ по нормальной подгруппе, порождённой образом отображения $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$.

Доказательство (окончание).

Далее сначала рассмотрим случай приклеивания двумерной клетки e^2, т. е. $n = 2$. В этом случае $A \cap B$ деформационно ретрагируется на окружность в $e^2 \setminus \{y\}$, и мы получаем, что образ группы $\pi_1(A \cap B)$ в $\pi_1(A)$ — это нормальная подгруппа, порождённая классом петли, задаваемой отображением $f\colon S^1 \to X^1$. Таким образом, при приклеивании новой двумерной клетки e^2 к соотношениям в группе $\pi_1(X) = \pi_1(A)$ добавляется ещё одно соотношение $\beta = 1$, отвечающее этой двумерной клетке.

После того как мы приклеили все двумерные клетки, дальнейшее приклеивание клеток e^n размерности $n \geqslant 3$ не меняет группу $\pi_1(X)$. Это следует из того, что $A \cap B$ деформационно ретрагируется на $(n-1)$-мерную сферу в $e^n \setminus \{y\}$; таким образом, $\pi_1(A \cap B) = \pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ при $n \geqslant 3$. □

Пример (фундаментальная группа поверхности S_g)

Вычислим фундаментальную группу ориентируемой поверхности S_g рода g (сферы с g ручками). Она имеет клеточную структуру с одной нульмерной клеткой, $2g$ одномерными клетками $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$ и одной двумерной клеткой. Одномерный остов — это букет $2g$ окружностей; его фундаментальная группа — свободная группа F_{2g} с образующими $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$. Двумерная клетка приклеена по петле, заданной произведением коммутаторов этих образующих.

Поэтому $\pi_1(S_g)$ — факторгруппа свободной группы F_{2g} по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle\, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \,\rangle.$$

В частности, фундаментальная группа тора $T^2 = S_1$ изоморфна факторгруппе группы F_2 по соотношению $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т. е. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Это, конечно, следует из простой формулы $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Предложение

Поверхность S_g не гомеоморфна и даже не гомотопически эквивалентна поверхности $S_{g'}$, если $g \neq g'$.

Доказательство.

Группа $\pi_1(S_g)$ получается из свободной группы F_{2g} факторизацией по одному соотношению, которое представляет собой произведение коммутаторов, а значит лежит в коммутанте F'_{2g}. Поэтому абеленизация группы $\pi_1(S_g)$ совпадает с абеленизацией свободной группы F_{2g} и представляет собой группу $\mathbb{Z}^{2g}$ — свободную абелеву группу ранга $2g$. Если $S_g \simeq S_{g'}$, то $\pi_1(S_g) \cong \pi_1(S_{g'})$, а значит и абеленизации этих групп изоморфны, что влечёт равенство $g = g'$. □

Пример (фундаментальная группа проективной плоскости)

Используя клеточное разбиение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с тремя клетками e^0, e^1, e^2, мы получаем, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathbb{Z}$ (свободной группы с одной образующей a) по одному соотношению $a^2 = 1$. Таким образом, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \langle\, a \mid a^2 \,\rangle = \mathbb{Z}_2$.

Отсюда следует, что проективная плоскость не гомеоморфна ни одной из поверхностей S_g.