Введение в топологию

Лекция 10

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

11 ноября 2021 г.

Свободное произведение групп (напоминание)

Пусть дан конечный или бесконечный набор групп $\{G_\alpha\}$. Свободное произведение $*_\alpha G_\alpha$ состоит из всех конечных слов $g_1 g_2 \ldots g_m$ произвольной длины $m \geqslant 0$, где $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \ne e$, причём соседние буквы g_i и g_{i+1} лежат в разных группах, т. е. $\alpha_i \ne \alpha_{i+1}$. Слова, удовлетворяющие этим условиям, называются приведёнными.

Неприведённое слово всегда можно преобразовать в приведённое, заменив соседние буквы, которые лежат в одной и той же группе G_{α_i}, на их произведение в G_{α_i} и удалив тривиальные буквы. Слову разрешается быть пустым; пустое слово будет единицей в группе $*_\alpha G_\alpha$.

Умножение в группе $*_\alpha G_\alpha$ — это приставление, т. е. запись одного слова за другим: $(g_1 \ldots g_m)(h_1 \ldots h_n) = g_1 \ldots g_m h_1 \ldots h_n$, с последующим преобразованием в приведённое слово.

Например, в произведении $(g_1 \ldots g_m)(g_m^{-1} \ldots g_1^{-1})$ всё сокращается, и мы получаем единицу группы $*_\alpha G_\alpha$, т. е. пустое слово. Это даёт существование обратного элемента для любого слова.

Свободная группа

Если каждая из групп G_α есть бесконечная циклическая группа $\mathbb{Z}$ (группа целых чисел), то свободное произведение $*_\alpha G_\alpha$ называется свободной группой.

Элементами свободной группы являются слова вида $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_m^{n_m}$, где $a_i \in G_{\alpha_i} \cong \mathbb{Z}$ — образующая, $n_i \neq 0$ — целые числа и $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Набор $\{a_\alpha\}$, в который входит по одной образующей a_α каждой из групп $G_\alpha = \mathbb{Z}$, называется базисом свободной группы, а число элементов базиса называется рангом свободной группы. При этом базис свободной группы определён неоднозначно, и тот факт, что все базисы имеют одинаковую мощность, нуждается в доказательстве, которое мы здесь не приводим.

Свободная группа конечного ранга k будет обозначаться F_k или $F(a_1, \ldots, a_k)$, если необходимо явно указать образующие. Заметим, что $F_1 \cong \mathbb{Z}$, а группа F_2 неабелева.

Всякую группу G можно получить как факторгруппу свободной группы. Для этого надо выбрать набор образующих группы G, т. е. такой набор элементов g_i, $i \in I$, что любой другой элемент $g \in G$ представляется в виде произведения элементов g_i и g_i^{-1} (например, в качестве набора образующих можно взять все элементы группы G). Тогда мы имеем эпиморфизм $f\colon F \to G$ из свободной группы F с множеством образующих I в G, переводящий i-ю образующую a_i группы F в g_i. Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой $H \subset F$; мы имеем $G \cong F/H$. Позже мы покажем, что любая подгруппа свободной группы является свободной. Набор образующих h_j, $j \in J$, группы H называется соотношениями между образующими g_i. При гомоморфизме f элементы h_j переходят в произведения элементов g_i, g_i^{-1}, которые равны 1 в группе G.

Часто используют запись

$$G = \langle\, g_i, i \in I \mid h_j, j \in J \,\rangle,$$

что означает, что группа G задана образующими g_i и соотношениями h_j, т. е. представлена в виде факторгруппы свободной группы с образующими g_i по её нормальной подгруппе, порождённой элементами h_j.

Если G произвольная группа и g_i, $i \in I$, — набор её элементов, то факторгруппой группы G по соотношениям $g_i = 1$ называется факторгруппа группы G по нормальной подгруппе, порождённой элементами g_i, $i \in I$.

Абеленизацией группы G называется факторгруппа группы G по всевозможным соотношениям $ghg^{-1}h^{-1} = 1$, $g, h \in G$, т. е. факторгруппа по нормальной подгруппе, порождённой всевозможными коммутаторами $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$. Эта подгруппа называется коммутантом группы G и обозначается $[G, G]$ или G'.

Абеленизация свободной группы $F = *_\alpha \mathbb{Z}$ — это свободная абелева группа $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$, базисом которой служит то же самое множество образующих.

Теорема ван Кампена

Пусть пространство X представлено в виде объединения линейно связных открытых подмножеств A_α, каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$. Гомоморфизмы $i_\alpha\colon \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$, индуцированные включениями, продолжаются до гомоморфизма

$$\Phi\colon \ *_\alpha\, \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X).$$

Если

$$i_{\alpha\beta}\colon \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$$

— гомоморфизм, индуцированный включением $A_\alpha \cap A_\beta \to A_\alpha$, то $i_\alpha i_{\alpha\beta} = i_\beta i_{\beta\alpha}$, так как обе эти композиции индуцированы включением $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$. Таким образом, ядро гомоморфизма Φ содержит элементы вида $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, где $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$.

Теорема (ван Кампен)

Пусть X — объединение линейно связных открытых множеств A_α, каждое из которых содержит отмеченную точку $x_0 \in X$.

а) *Если каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связно, то $\Phi\colon *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ является эпиморфизмом.*

б) *Если, кроме того, каждое пересечение $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ линейно связно, то ядро гомоморфизма Φ — это нормальная подгруппа N, порождённая всеми элементами вида $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$, а потому Φ индуцирует изоморфизм*

$$\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N.$$

Доказательство

Докажем утверждение а), т. е. сюръективность $\Phi\colon *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$. Мы утверждаем, что для данной петли $f\colon I \to X$ в отмеченной точке x_0 существует такое разбиение $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ отрезка I, что $f([s_{i-1}, s_i]) \subset A_\alpha$ для некоторого α. Действительно, так как f непрерывно, каждая точка $s \in I$ имеет окрестность $U(s) \subset I$, для которой $f(U(s))$ лежит в одном из множеств A_α. Из компактности отрезка следует, что конечное число таких интервалов покрывает I. Тогда концы этих интервалов задают требуемое разбиение отрезка I.

Пусть $f([s_{i-1}, s_i]) \subset A_i$ и обозначим $f_i = f|_{[s_{i-1}, s_i]}$. Тогда $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$, где $f_i \subset A_i$. Так как $A_i \cap A_{i+1}$ линейно связно, мы можем соединить x_0 с $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$ путём g_i в $A_i \cap A_{i+1}$. Теперь рассмотрим петлю

$$(f_1 \cdot \overline{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \overline{g}_2) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \overline{g}_3) \cdot \ldots \cdot (g_{m-1} \cdot f_m),$$

гомотопную f. Каждая петля в скобках лежит в одном из множеств A_α. Следовательно, $[f]$ лежит в образе отображения Φ, а потому Φ сюръективно.

Доказательство (продолжение)

Теперь докажем утверждение б). Мы будем рассматривать факторизации элементов $[f] \in \pi_1(X)$, т. е. формальные разложения вида $[f] = [f_1] \dots [f_k]$, где

- каждый множитель f_i — это петля с началом и концом в x_0, целиком содержащаяся в одном из множеств A_α, с гомотопическим классом $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$;
- петля f гомотопна $f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ в X.

Таким образом, факторизация гомотопического класса $[f]$ — это слово в $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, возможно, приводимое, которое переходит в $[f]$ при отображении Φ. Утверждение а) показывает, что у каждого элемента $[f] \in \pi_1(X)$ есть факторизация.

Доказательство (продолжение)

Назовём две факторизации класса $[f]$ эквивалентными, если они связаны последовательностью преобразований следующих двух видов или обратных к ним:

1) соседние члены $[f_i][f_{i+1}]$ объединяются в один член $[f_i \cdot f_{i+1}]$, если $[f_i]$ и $[f_{i+1}]$ лежат в одной группе $\pi_1(A_\alpha)$;
2) член $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ рассматривается как лежащий в группе $\pi_1(A_\beta)$, а не в $\pi_1(A_\alpha)$, если f_i — петля в $A_\alpha \cap A_\beta$.

Первое преобразование не изменяет элемент группы $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, задаваемый факторизацией. Второе преобразование не изменяет образ этого элемента в факторгруппе $Q = *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$ согласно определению подгруппы N. Таким образом, эквивалентные факторизации дают один и тот же элемент группы Q.

Мы покажем, что любые две факторизации класса $[f]$ эквивалентны. Отсюда будет следовать, что отображение $Q \to \pi_1(X)$, индуцированное отображением Φ, инъективно. Тем самым утверждение б) будет доказано.

Доказательство (продолжение)

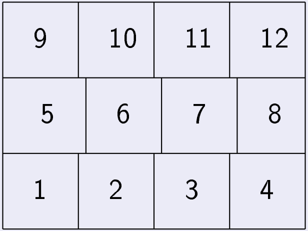
Пусть $[f_1]\dots[f_k]$ и $[f_1']\dots[f_\ell']$ — две факторизации класса $[f]$. Пусть $F\colon I\times I\to X$ — гомотопия, связывающая $f_1\cdot\ldots\cdot f_k$ с $f_1'\cdot\ldots\cdot f_\ell'$.

Существуют такие разбиения $0=s_0<s_1<\ldots<s_m=1$ и $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$, что образ каждого из прямоугольников $R_{ij}=[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j]$ при отображении F лежит в одном множестве A_α, которое мы обозначим A_{ij}. Эти разбиения можно получить, покрыв $I\times I$ конечным числом прямоугольников $[a,b]\times[c,d]$, каждый из которых отображается в одно множество A_α, используя рассуждения с компактностью, а затем разделив $I\times I$ всеми горизонтальными и вертикальными прямыми, содержащими стороны этих прямоугольников.

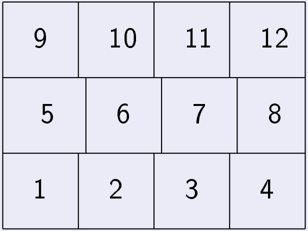
Можно считать, что s-разбиение является подразбиением тех разбиений, которые дают произведения $f_1\cdot\ldots\cdot f_k$ и $f_1'\cdot\ldots\cdot f_\ell'$.

Доказательство (продолжение)

Так как F отображает окрестность прямоугольника R_{ij} в A_{ij}, мы можем пошевелить вертикальные стороны прямоугольников R_{ij} так, чтобы каждая точка квадрата $I \times I$ принадлежала не более чем трём прямоугольникам R_{ij}. Можно считать, что есть по крайней мере три ряда прямоугольников, поэтому мы можем шевелить только прямоугольники в промежуточных рядах, оставляя верхний и нижний ряд без изменений. Занумеруем теперь прямоугольники $R_1, R_2, \ldots, R_{mn}$ как показано на рисунке.



Доказательство (продолжение)



Если γ — путь в $I \times I$, идущий из точки левой стороны в точку правой стороны, то $F|_\gamma$ является петлёй с началом и концом в отмеченной точке x_0, так как F отображает левую и правую стороны квадрата $I \times I$ в x_0.

Пусть γ_r — путь, отделяющий первые r прямоугольников $R_1, \ldots, R_r$ от остальных прямоугольников. Тогда γ_0 — нижняя сторона квадрата $I \times I$, а γ_{mn} — его верхняя сторона. Будем переходить от γ_r к γ_{r+1}, протаскивая этот путь по прямоугольнику R_{r+1}.

Доказательство (продолжение)

Будем называть вершины прямоугольников R_r **вершинами**. Для каждой вершины v, для которой $F(v) \neq x_0$, рассмотрим путь g_v из x_0 в $F(v)$. Мы можем выбрать путь g_v так, чтобы он принадлежал пересечению двух или трёх множеств A_{ij} в соответствии с тем, сколько прямоугольников R_r содержат вершину v, так как мы предполагаем, что двойные и тройные пересечения множеств A_{ij} линейно связны. Вставим в $F|_{\gamma_r}$ пути вида $\overline{g}_v g_v$ в последовательных вершинах v, как при доказательстве сюръективности отображения Φ. В результате мы получим факторизацию класса $[F|_{\gamma_r}]$. Петли в этой факторизации соответствуют вертикальным и горизонтальным отрезкам между соседними вершинами, через которых проходит путь γ_r. Петлю, соответствующую отрезку между соседними вершинами, можно рассматривать, как лежащую в A_{ij} для любого из прямоугольников R_s, содержащих этот отрезок. Если мы выберем другой из этих прямоугольников R_s, то факторизация класса $[F|_{\gamma_r}]$ заменится на эквивалентную факторизацию.

Доказательство (окончание).

При протаскивании пути по прямоугольнику R_{r+1} факторизация $F|_{\gamma_r}$ заменяется на $F|_{\gamma_{r+1}}$ посредством гомотопии в пределах множества A_{ij}, соответствующего R_{r+1}. Это множество A_{ij} можно выбрать одним и тем же для всех отрезков путей γ_r и γ_{r+1}, лежащих в R_{r+1}. Таким образом, факторизации, соответствующие последовательным путям γ_r и γ_{r+1}, эквивалентны.

Мы можем добиться, чтобы факторизация, соответствующая γ_0, была эквивалентна факторизации $[f_1]\ldots[f_k]$, выбирая путь g_v для каждой вершины v вдоль нижней стороны квадрата $I \times I$ так, чтобы он принадлежал не только двум множествам A_{ij}, соответствующим прямоугольнику R_s, содержащему v, но также принадлежал и множеству A_α, соответствующему пути f_i, в области определения которого лежит точка v. Аналогично мы можем считать, что факторизация, соответствующая последнему пути γ_{mn}, эквивалентна $[f_1']\ldots[f_\ell']$. Так как факторизации, соответствующие всем путям γ_r, эквивалентны, мы получаем, что факторизации $[f_1]\ldots[f_k]$ и $[f_1']\ldots[f_\ell']$ эквивалентны. $\square$