Введение в топологию

Лекция 9

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

28 октября 2021 г.

Фундаментальная группа окружности

Теорема

Группа $\pi_1(S^1)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Доказательство

Доказательство использует построение «универсального накрытия» над окружностью; этот метод будет развит и обобщён в дальнейшем.

Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Рассматривая прообразы, мы можем отождествлять точки окружности с вещественными числами, определёнными с точностью до слагаемых вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В качестве отмеченной точкой окружности мы возьмём точку $(1, 0)$, соответствующую $t = 0$.

Доказательство (продолжение)

Таким образом, петлю $\varphi\colon I \to S^1$ можно считать многозначной функцией на отрезке I, значение которой в каждой точке определено с точностью до слагаемого $2\pi k$ и значением которой в точках 0 и 1 служит само множество чисел вида $2\pi k$.

У этой многозначной функции существует непрерывная однозначная ветвь — непрерывная функция на отрезке I, значение которой в каждой точке принадлежит множеству значений многозначной функции φ в этой точке. Такая однозначная функция $\widetilde{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}$ будет определена единственным образом, если наложить условие $\widetilde{\varphi}(0) = 0$.

Доказательство (продолжение)

Для построения функции $\widetilde{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}$ по петле $\varphi\colon I \to S^1$ мы выберем такое n, что при $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{n}$ точки $\varphi(t_1)$ и $\varphi(t_2)$ не диаметрально противоположны. (Нужно рассмотреть открытое покрытие отрезка I, состоящее из всевозможных множеств вида $\varphi^{-1}(A)$, где A — открытая полуокружность, и выделить конечное подпокрытие).

Положив $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$ мы берём в качестве $\widetilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t, которое отличается от 0 меньше, чем на π. Далее, при $\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{2}{n}$ мы берём в качестве $\widetilde{\varphi}(t)$ то из значений функции φ в точке t, которое отличается от $\widetilde{\varphi}(\frac{1}{n})$ меньше, чем на π. И так далее.

По построению, $f(\widetilde{\varphi}(t)) = \varphi(t)$; в частности, $\widetilde{\varphi}(1) = 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, всякая непрерывная функция $\chi\colon I \to \mathbb{R}$, такая, что $\chi(0) = 0$ и $\chi(1) = 2\pi k$, имеет вид $\widetilde{\varphi}$ для некоторой петли φ, а именно, для петли $\varphi(t) = f(\chi(t))$.

Доказательство (окончание).

Теперь построим отображение

$$g\colon \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}, \quad g([\varphi]) = \widetilde{\varphi}(1)/2\pi.$$

Чтобы убедиться, что g — изоморфизм групп, заметим следующее.

1) Число $\widetilde{\varphi}(1)/2\pi$ не меняется при гомотопии, поскольку $\widetilde{\varphi}(1)$ принимает значения в дискретном множестве. Таким образом, число $\widetilde{\varphi}(1)/2\pi$ зависит только от гомотопического класса $[\varphi]$ и отображение g определено корректно.

2) Отображение g сюръективно, т. е. любое $k \in \mathbb{Z}$ лежит в его образе. Действительно, достаточно взять $\varphi = \psi_k$, где $\widetilde{\psi}_k(t) = 2\pi kt$.

3) Если $\widetilde{\varphi}_1(1) = \widetilde{\varphi}_2(1)$, то $\varphi_1 \sim \varphi_2$, а потому потому g инъективно. Действительно, функции $\widetilde{\varphi}_1(t)$ и $\widetilde{\varphi}_2(t)$ гомотопны в классе функций с заданными значениями в 0 и 1 (если $\widetilde{\varphi}(1) = 2\pi k$, то $\widetilde{\varphi} \sim \widetilde{\psi}_k$; гомотопия задаётся формулой $\widetilde{\varphi}_s(t) = (1-s)\widetilde{\varphi}(t) + s2\pi kt$).

4) g является гомоморфизмом, так как $g([\varphi]) = g([\psi_k])$ для некоторого k, а $\psi_k\psi_l \sim \psi_{k+l}$, так как $\widetilde{\psi_k\psi_l}(1) = \widetilde{\psi}_{k+l}(1)$. $\square$

Предложение

Окружность $S^1 \subset D^2$ не является ретрактом диска D^2.

Доказательство.

Допустим, существует ретракция $r\colon D^2 \to S^1$, т. е. композиция $S^1 \xhookrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$ есть тождественное отображение. Тогда, согласно свойствам фундаментальной группы, композиция

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)$$

есть тождественный изоморфизм. Но это невозможно, так как $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, а $\pi_1(D^2) = \{1\}$. $\square$

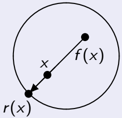
В качестве следствия мы получаем классический результат, доказательство которого было одним из первых триумфов алгебраической топологии.

Теорема

Любое непрерывное отображение $f\colon D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку, т. е. точку x, для которой $f(x) = x$.

Доказательство.

Предположим, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$. Тогда можно определить отображение $r\colon D^2 \to S^1$, взяв в качестве $r(x)$ точку окружности S^1, в которой луч, идущий из точки $f(x)$ в точку x, пересекает диск D^2.



При этом, очевидно, $r(x) = x$, если $x \in S^1$, т. е. r — ретракция. Это противоречит предыдущему утверждению. $\square$

Фундаментальная группа окружности используется в следующем топологическом доказательстве «основной теоремы алгебры».

Теорема

Любой непостоянный многочлен $p(z)$ с коэффициентами в $\mathbb{C}$ имеет комплексный корень.

Доказательство.

Можно считать $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$. Пусть $p(z)$ не имеет корней в $\mathbb{C}$. Тогда для $r \geqslant 0$ можно определить следующую петлю с началом в точке 1 на единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$:

$$\varphi_r \colon I \to S^1, \quad \varphi_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}. \qquad (1)$$

При изменении r получаем гомотопию петель. Петля φ_0 тривиальна, поэтому $[\varphi_r] = [\varphi_0] = 0$ в $\pi_1(S^1)$ для всех r.

Выберем $r > \max\{|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|, 1\}$. Тогда при $|z| = r$ получаем

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)|z^{n-1}| > |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|.$$

Следовательно, многочлен $p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ не имеет корней на окружности $|z| = r$. Заменив p на p_t в формуле (1), мы получим функцию $\varphi_r(s,t)$. При изменении t от 1 до 0 эта функция задаёт гомотопию петли $\varphi_r(s) = \varphi_r(s,1)$ в петлю $\varphi_r(s,0) = \psi_n(s) = e^{2\pi ins}$ — n-ю степень образующей группы $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Так как $[\psi_n] = [\varphi_r] = 0$, мы получаем $n = 0$. Таким образом, единственные многочлены без корней в $\mathbb{C}$ — константы. □

Свободное произведение групп

Пусть дан конечный или бесконечный набор групп $\{G_\alpha\}$. Свободное произведение $*_\alpha G_\alpha$ (если групп конечное число, то используется обозначение $G_1 * G_2 * \ldots * G_k$) состоит из всех конечных слов $g_1 g_2 \ldots g_m$ произвольной длины $m \geqslant 0$, где $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq e$, причём соседние буквы g_i и g_{i+1} лежат в разных группах, т. е. $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Слова, удовлетворяющие этим условиям, называются приведёнными.

Неприведённое слово всегда можно преобразовать в приведённое, заменив соседние буквы, которые лежат в одной и той же группе G_{α_i}, на их произведение в G_{α_i} и удалив тривиальные буквы. Слову разрешается быть пустым; пустое слово будет единицей в группе $*_\alpha G_\alpha$.

Умножение в группе $*_\alpha G_\alpha$ — это приставление, т. е. запись одного слова за другим: $(g_1 \ldots g_m)(h_1 \ldots h_n) = g_1 \ldots g_m h_1 \ldots h_n$, с последующим преобразованием в приведённое слово. Например, в произведении $(g_1 \ldots g_m)(g_m^{-1} \ldots g_1^{-1})$ всё сокращается, и мы получаем единицу группы $*_\alpha G_\alpha$, т. е. пустое слово. Это даёт существование обратного элемента для любого слова.

Нетривиальной является проверка ассоциативности умножения слов в свободном произведении $*_\alpha G_\alpha$.

Лемма

Определённая выше операция умножения приведённых слов (приставление с последующим приведением) ассоциативна.

Доказательство

Пусть W — множество приведённых слов $g_1 \dots g_m$, включая пустое слово. Каждому элементу $g \in G_\alpha$ сопоставим отображение $L_g \colon W \to W$, задаваемое умножением слева, $L_g(g_1 \dots g_m) = gg_1 \dots g_m$, с последующим приведением.

Доказательство (продолжение).

$L_g : W \to W$, $L_g(g_1 \dots g_m) = gg_1 \dots g_m$ с последующим приведением.

При этом мы имеем $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ для любых $g, g' \in G_\alpha$, т. е. $g(g'(g_1 \dots g_m)) = (gg')(g_1 \dots g_m)$; это следует из ассоциативности умножения в G_α.

Из формулы $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ вытекает, что отображение L_g обратимо, с обратным отображением $L_{g^{-1}}$. Поэтому сопоставление $g \mapsto L_g$ задаёт гомоморфизм группы G_α в группу $P(W)$ всех перестановок множества W.

Теперь определим отображение $L\colon W \to P(W)$ формулой $L(g_1 \dots g_m) = L_{g_1} \dots L_{g_m}$. Отображение L инъективно, так как перестановка $L(g_1 \dots g_m)$ отображает пустое слово в $g_1 \dots g_m$ и поэтому не является тождественной, если само слово $g_1 \dots g_m$ не является пустым. Операция умножения в W при отображении L переходит в композицию в $P(W)$, так как $L_{gg'} = L_g L_{g'}$. Так как композиция перестановок ассоциативна, мы получаем, что умножение в W ассоциативно. $\square$

Каждая группа G_α отождествляется с подгруппой свободного произведения $*_\alpha G_\alpha$, состоящей из пустого слова и однобуквенных слов $g \in G_\alpha$.

Любой набор гомоморфизмов $\varphi_\alpha\colon G_\alpha \to H$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\varphi\colon *_\alpha G_\alpha \to H$. А именно, значение гомоморфизма φ на слове $g_1 \ldots g_m$, где $g_i \in G_{\alpha_i}$, полагается равным $\varphi_{\alpha_1}(g_1)\ldots\varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Таким образом, свободное произведение является копроизведением в категории групп.

Например, включения $G \hookrightarrow G \times H$ и $H \hookrightarrow G \times H$ индуцируют эпиморфизм $G * H \to G \times H$.