Введение в топологию

Лекция 8

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

21 октября 2021 г.

Фундаментальная группа

Напомним, что петлёй в точке x_0 пространства X называется отображение (путь) $\varphi\colon I \to X$, $t \mapsto \varphi(t)$, для которого $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$.

Петли φ и φ' называются гомотопными (обозначение: $\varphi \sim \varphi'$), если существует такая гомотопия $\varphi_s\colon I \to X$, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi'$ и $\varphi_s(0) = \varphi_s(1) = x_0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$ (последнее условие означает, что гомотопия постоянна на концах путей).

Произведение $\varphi\psi$ петель φ и ψ — это петля χ, у которой $\chi(t) = \varphi(2t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ и $\chi(t) = \psi(2t-1)$ при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$. Другими словами, произведение двух петель — это петля, составленная из двух петель, которые проходятся последовательно (с удвоенной скоростью).

Предложение

Произведение петель (в точке x_0) обладает свойствами:

а) *если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$, то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$,*

б) *$(\varphi\psi)\chi \sim \varphi(\psi\chi)$ для любых петель φ, ψ, χ,*

в) *если ε — постоянная петля, т. е. $\varepsilon(t) = x_0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $\varphi\varepsilon \sim \varepsilon\varphi \sim \varphi$ для любой петли φ,*

г) *для петли φ определим петлю $\overline{\varphi}$ как $\overline{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$; тогда $\varphi\overline{\varphi} \sim \overline{\varphi}\varphi \sim \varepsilon$.*

Доказательство

Проверим свойство а). Пусть φ_s — гомотопия между φ и φ', а ψ_s — гомотопия между ψ и ψ'. Тогда гомотомия χ_s между $\chi = \varphi\psi$ и $\chi' = \varphi'\psi'$ задаётся формулой

$$\chi_s(t) = \begin{cases} \varphi_s(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi_s(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство (продолжение)

Проверим свойство б). Пусть $\xi = (\varphi\psi)\chi$ и $\xi' = \varphi(\psi\chi)$, т. е.

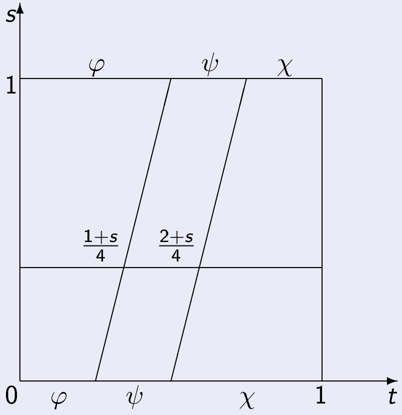
$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi(4t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}, \\ \psi(4t-1) & \text{при } \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \chi(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \quad \xi'(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(4t-2) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}, \\ \chi(4t-3) & \text{при } \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда гомотопия ξ_s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ между ξ и ξ' задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{4}, \\ \psi(4t-1-s) & \text{при } \frac{1+s}{4} \leqslant t \leqslant \frac{2+s}{4}, \\ \chi\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \text{при } \frac{2+s}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство (продолжение)

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{4}, \\ \psi(4t-1-s) & \text{при } \frac{1+s}{4} \leqslant t \leqslant \frac{2+s}{4}, \\ \chi\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \text{при } \frac{2+s}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



Доказательство (окончание).

Проверим свойство в). Гомотопия между $\varphi\varepsilon$ и φ задаётся формулой

$$\xi_s(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{2}, \\ \varepsilon(t) = x_0 & \text{при } \frac{s+1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Проверим свойство г). Гомотопия между $\chi = \varphi\overline{\varphi}$ и ε задаётся формулой

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} \varphi\bigl(2t(1-s)\bigr) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \varphi\bigl(2(1-t)(1-s)\bigr) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Другими словами, в момент s гомотопии мы проходим по петле φ от x_0 до точки $\varphi(1-s)$, а затем проходим по ней обратно до x_0. □

Мы будем обозначать через $[\varphi]$ класс эквивалентости петли φ относительно гомотопии петель.

Из предыдущего утверждения следует, что множество классов гомотопных петель в точке $x_0 \in X$ образует группу относительно произведения $[\varphi][\psi] = [\varphi\psi]$, с единицей $[\varepsilon]$ и обратным элементом $[\varphi]^{-1} = [\overline{\varphi}]$.

Эта группа обозначается $\pi_1(X, x_0)$ и называется фундаментальной группой пространства X с отмеченной точкой x_0.

Скажем, что гомотопия φ_s отображения $\varphi\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ пространств с отмеченными точками сохраняет отмеченные точки, если $\varphi_s(x_0)=y_0$ при $0\leqslant s\leqslant 1$.

Предложение

а) *Отображение* $f\colon X\to Y$*, такое, что* $f(x_0)=y_0$*, индуцирует гомоморфизм групп* $f_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$.

б) *Тождественное отображение* $\mathrm{id}\colon X\to X$ *индуцирует тождественный гомоморфизм фундаментальных групп, а композиция отображений* $f\colon X\to Y$ *и* $g\colon Y\to Z$, $f(x_0)=y_0$, $g(y_0)=z_0$*, индуцирует композицию гомоморфизмов фундаментальных групп, т. е.* $(fg)_*=f_*g_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Z,z_0)$.

в) *Если отображения* $f,g\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ *гомотопны с сохранением отмеченых точек, то гомоморфизмы* f_* *и* g_* *совпадают.*

Доказательство.

а) Определим отображение f_*, переводящее петлю $\varphi\colon I \to X$ в петлю $f \circ \varphi\colon I \to Y$. Если петли φ и φ' гомотопны при помощи гомотопии $F\colon I \times I \to X$, то петли $f \circ \varphi$ и $f \circ \varphi'$ гомотопны при помощи гомотопии $f \circ F$. Поэтому отображение f_* корректно определено на классах гомотопии петель, $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Далее, f_* есть гомоморфизм, так как

$$f_*([\varphi][\psi]) = f_*([\varphi\psi]) = [f \circ (\varphi\psi)] = \\ = [(f \circ \varphi)(f \circ \psi)] = [f \circ \varphi][f \circ \psi] = f_*([\varphi])f_*([\psi]).$$

б) $(fg)_*[\varphi] = [f \circ g \circ \varphi] = f_*[g \circ \varphi] = f_*g_*[\varphi]$.

в) Пусть $G\colon X \times I \to Y$ — гомотопия между f и g, сохраняющая отмеченные точки, т. е. $G(x_0, s) = y_0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$. Тогда, для любой петли $\varphi\colon I \to X$, петли $f \circ \varphi$ и $g \circ \varphi$ гомотопны: гомотопия задаётся формулой $H\colon I \times I \to Y$, $H(t, s) = G(\varphi(t), s)$. Следовательно, $f_*[\varphi] = [f \circ \varphi] = [g \circ \varphi] = g_*[\varphi]$ и $f_* = g_*$. $\square$

Зависимость от отмеченной точки

Теорема

Если пространство X линейно связно, то $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ (изоморфны) для любых точек $x_0, x_1 \in X$.

Доказательство

Пусть $\alpha \colon I \to X$ — путь из x_0 в x_1, т. е. $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha(1) = x_1$. Для каждой петли φ в точке x_0 мы положим $b_\alpha(\varphi) = (\overline{\alpha}\varphi)\alpha$. Здесь $\overline{\alpha}$ — «обратный» путь, $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, а умножение путей определяется так же, как и умножение петель, при условии, что второй путь начинается там, где кончается первый. Тогда $b_\alpha(\varphi)$ — петля в точке x_1, причём её гомотопический класс зависит только от гомотопических классов петли φ и пути α (где подразумеваются гомотопии с закреплёнными концами). Получаем отображение «замены отмеченной точки»

$$b_\alpha \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1).$$

Доказательство (окончание).

Отображение

$$b_\alpha\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1),\quad [\varphi]\mapsto[\overline{\alpha}\varphi\alpha]$$

зависит только от гомотопического класса пути α из x_0 в x_1.

Отображение b_α является гомоморфизмом, так как

$$b_\alpha([\varphi\psi])=[\overline{\alpha}\varphi\psi\alpha]=[\overline{\alpha}\varphi\alpha\overline{\alpha}\psi\alpha]=[\overline{\alpha}\varphi\alpha][\overline{\alpha}\psi\alpha]=b_\alpha([\varphi])b_\alpha([\psi]).$$

Кроме того, формула $b_\alpha^{-1}([\chi])=[\alpha\chi\overline{\alpha}]$ задаёт обратный гомоморфизм, так что b_α — изоморфизм. □

Изоморфизм b_α зависит от гомотопического класса пути α. Если β — другой путь из x_0 в x_1, то $\gamma = \overline{\alpha}\beta$ — петля в точке x_1, и мы имеем

$$b_\beta([\varphi]) = [\overline{\beta}\varphi\beta] = [\overline{\beta}\alpha\overline{\alpha}\varphi\alpha\overline{\alpha}\beta] = [\overline{\beta}\alpha][\overline{\alpha}\varphi\alpha][\overline{\alpha}\beta] = [\gamma]^{-1}b_\alpha([\varphi])[\gamma].$$

В частности, если фундаментальная группа коммутативна, то изоморфизм b_α вообще не зависит от α. В этом случае мы можем говорить о фундаментальной группе, не фиксируя отмеченной точки.

В общем случае о фундаментальной группе линейно связного пространства без отмеченной точки можно говорить только как об абстрактной группе (т. е. можно сказать, что она, например, конечна или нильпотентна, но нельзя фиксировать в ней определённый элемент).

Далее мы часто будем использовать сокращённое обозначение $\pi_1(X)$ для фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ в случае, когда выбор отмеченной точки x_0 не влияет на результат или ясен из контекста.

Предложение

Если $f\colon X \to Y$ *— гомотопическая эквивалентность, то* $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *является изоморфизмом для любой точки* $x_0 \in X$.

Доказательство

Рассмотрим отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ и $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$, соответственно. Если бы эти гомотопии сохраняли отмеченные точки, то мы бы получили $g_* f_* = \mathrm{id}$ и $f_* g_* = \mathrm{id}$ — тождественные изоморфизмы, откуда бы следовало, что f_* — изоморфизм.

Доказательство (окончание).

Рассмотрим общий случай. Имеем $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $gf \simeq \mathrm{id}_X$, $fg \simeq \mathrm{id}_Y$.

Гомотопия $F\colon X \times I \to X$ между id_X и gf может не сохранять отмеченную точку. Рассмотрим путь $\alpha(t) = F(x_0, t)$, который проходит отмеченная точка x_0 при этой гомотопии. Тогда $\alpha(0) = x_0$ и $\alpha(1) = g(f(x_0))$. Легко видеть, что $g_*f_* = b_\alpha\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, gf(x_0))$ — изоморфизм, построенный при доказательстве предыдущего утверждения. Отсюда следует, что $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ инъективно для любой точки $x_0 \in X$ (а g_* сюръективно).

Аналогично рассматривая гомотопию между id_Y и fg получим, что $f_*g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, fg(y_0))$ — изоморфизм. Отсюда получаем, что f_* сюръективно, а значит f_* — изоморфизм. $\square$

Напомним, что пространство X называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Следствие

Пусть X — стягиваемое пространство. Тогда $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ для любой точки $x_0 \in X$. В частности, $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = \{1\}$.

Предложение

$\pi_1(S^n) = \{1\}$ *при* $n \geqslant 2$.

Доказательство.

Это вытекает из теоремы о клеточной аппроксимации. Действительно, любая петля $\varphi\colon I \to S^n$, $\varphi(0) = \varphi(1) = s_0$, рассматриваемая как отображение клеточных пространств, гомотопна клеточному отображению. Если на отрезке I ввести стандартную клеточную структуру, а на S^n — клеточную структуру с двумя клетками s_0 и $S^n \setminus \{s_0\}$, то единственным клеточным отображением $I \to S^n$ при $n \geqslant 2$ будет отображение в точку s_0, т. е. постоянная петля. $\square$