Введение в топологию

Лекция 7

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

14 октября 2021 г.

Теорема о клеточной аппроксимации

Если $A \subset X$ — подпространство, то **гомотопией относительно A** называется гомотопия $F_t \colon X \to Y$, такая, что $F_t(a) = F_{t'}(a)$ для любых $t, t' \in I$ и $a \in A$ (т. е. гомотопия неподвижна на A).

Теорема

Любое отображение $f \colon X \to Y$ клеточных пространств гомотопно клеточному отображению. Если f уже является клеточным на клеточном подпространстве $A \subset X$, то можно выбрать гомотопию относительно A.

Доказательство

Предположим по индукции, что $f \colon X \to Y$ уже клеточно на остове X^{n-1}, и пусть e^n — клетка в X. Замыкание $\overline{e}^n$ компактно в X, так как оно является образом характеристического отображения $D^n \to X$. Тогда $f(\overline{e}^n) \subset Y$ также компактно, а значит $f(e^n)$ пересекает только конечное число клеток в Y (задача).

Доказательство (продолжение)

Пусть ε^k — клетка самой высокой размерности, с которой пересекается $f(e^n)$. Можно считать, что $k > n$, так как иначе f уже клеточно на e^n. Ниже мы покажем, что существует деформация (гомотопия) отображения $f|_{X^{n-1}\cup e^n}$ относительно X^{n-1}, такая, что образ клетки e^n при деформированном отображении не содержит некоторую точку $y \in \varepsilon^k$. Тогда можно деформировать отображение $f|_{X^{n-1}\cup e^n}$ относительно X^{n-1} так, чтобы образ клетки e^n вообще не пересекал клетку ε^k. Для этого нужно композицию с деформационной ретракцией пространства $Y^k \setminus y$ на $Y^k \setminus \varepsilon^k$. Такая деформационная ретракция существует, так как существует деформационная ретракция $D^k \setminus x \to \partial D^k$ для $x \in \operatorname{int} D^k$, а характеристическое отображение $D^k \to Y$ клетки ε^k является гомеоморфизмом на $\operatorname{int} D^k$.

Доказательство (продолжение)

Повторяя этот процесс конечное число раз, мы добьёмся того, чтобы множество $f(e^n)$ не пересекало ни одну клетку размерности больше n. Делая это для всех n-мерных клеток и оставляя при этом отображение неподвижными на n-мерных клетках из A, где оно уже клеточное, мы получим гомотопию отображения $f|_{X^n}$ относительно $X^{n-1} \cup A^n$ в клеточное отображение.

Далее мы воспользуемся свойством продолжения гомотопии, чтобы продолжить эту гомотопию $X^n \times I \to Y$, вместе с постоянной гомотопией на A, до гомотопии на всём пространстве X, т. е. применим свойство продолжения гомотопии к паре $(X, X^n \cup A)$. В результате получим гомотопию исходного отображения $f\colon X \to Y$ в отображение, которое клеточно на X^n и совпадает на X^{n-1} с отображением из предыдущего шага.

Доказательство (продолжение)

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, возможно, бесконечную последовательность гомотопий, которую можно реализовать как одну гомотопию, выполняя гомотопию с номером n в течение времени t из интервала $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$.

Более подробно, сначала за время $t \in [0, \frac{1}{2}]$ мы деформируем исходное отображение $f\colon X \to Y$ в отображение, которое является клеточным на X^0. Затем за время $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ мы деформируем это отображение в отображение, которое является клеточным на X^1 и совпадает с предыдущим на X^0. И так далее. Непрерывность всей гомотопии обеспечивается аксиомой (W): для каждой клетки e из X гомотопия будет неподвижной, начиная с некоторого $t_e < 1$.

Чтобы заполнить недостающий шаг в рассуждении, нам понадобится следующая «лемма о свободной точке», которая будет доказана после окончания доказательства теоремы.

Лемма

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ *— открытое множество и* $\varphi\colon U \to \operatorname{int} D^k$ *— такое непрерывное отображение, что для некоторого замкнутого шара* $B^k \subset \operatorname{int} D^k$ *подмножество* $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ *компактно. Если* $k > n$*, то существует непрерывное отображение* $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$*, гомотопное* φ*, совпадающее с* φ *вне* V *и такое, что его образ не покрывает всего шара* B^k*.*

Доказательство теоремы (окончание).

Из леммы и свойств характеристических отображений $h\colon D^n \to X$ и $g\colon D^k \to Y$ клеток e^n и ε^k вытекает, что отображение $f|_{A\cup X^{n-1}\cup e^n}$ гомотопно относительно $A \cup X^{n-1}$ отображению $f'\colon A \cup X^{n-1} \cup e^n \to Y$, такому, что $f'(e^n)$ пересекает те же клетки, что и $f(e^n)$, но не содержит всю клетку ε^k. Действительно, применим лемму к подмножеству $U = h^{-1}(f^{-1}(\varepsilon^k) \cap e^n)$ и отображению $\varphi = g^{-1} \circ f \circ h\colon U \to \operatorname{int} D^k$ (тогда для любого замкнутого шара $B^k \subset \operatorname{int} D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно как замкнутое подмножество шара D^n). Лемма даёт нам отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$. Тогда мы определим отображение f' по формуле

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin h(U), \\ g \circ \psi \circ h^{-1}(x), & \text{если } x \in h(U). \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, так как отображения f и $g \circ \psi \circ h^{-1}$ совпадают на множестве $h(U \setminus V)$. Кроме того, гомотопия между φ и ψ даёт гомотопию между f и f', а $f'(e^n)$ не покрывает ε^k, так как $\psi(U)$ не покрывает всего шара B^k. $\square$

Для доказательства леммы о свободной точке мы используем кусочно-линейную аппроксимацию.

Напомним, что k-мерный симплекс Δ^k — это выпуклая оболочка набора из $k+1$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_k$ в $\mathbb{R}^n$, не лежащих на одной $(k-1)$-мерной плоскости. Эти $k+1$ точек называются вершинами симплекса, а выпуклые оболочки поднаборов множества вершин называются гранями. Грани являются симплексами размерности $\leqslant k$.

Симплициальный комплекс — это такой набор симплексов произвольной размерности в некотором $\mathbb{R}^n$, что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются, либо пересекаются по целой грани. Говорят, что некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ триангулировано, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют симплициальный комплекс.

Барицентром симплекса Δ^k с вершинами $x_0, x_1, \dots, x_k$ называется точка $\frac{1}{k+1}(x_0 + x_1 + \ldots + x_k)$.

Барицентрическим подразбиением симплекса Δ^k называется симплициальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса Δ^k; при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга.

По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение 0-мерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при $k > 0$ барицентрическое подразбиение k-мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично, индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплициального комплекса.

Эти конструкции обладают следующими двумя свойствами.

Во-первых, линейное (аффинное) отображение симплекса Δ^k в любое пространство $\mathbb{R}^m$ определяется своими значениями на вершинах.

Во-вторых, если диаметр симплекса Δ^k (максимальное расстояние между его точками) равен r, то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{k}{k+1}r$. Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

Лемма (о свободной точке)

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\varphi\colon U \to \operatorname{int} D^k$ — такое непрерывное отображение, что для некоторого замкнутого шара $B^k \subset \operatorname{int} D^k$ подмножество $V = \varphi^{-1}(B^k) \subset U$ компактно. Если $k > n$, то существует непрерывное отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$, гомотопное φ, совпадающее с φ вне V и такое, что его образ не покрывает всего шара B^k.

Доказательство

Прежде всего заметим, что отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$, совпадающее с φ вне V, будет автоматически гомотопно φ относительно $U \setminus V$; достаточно взять «прямолинейную» гомотопию, при которой точка $\varphi(u)$ движется к точке $\psi(u)$ по отрезку, соединяющему $\varphi(u)$ с $\psi(u)$.

Доказательство (продолжение)

Теперь построим в шаре $B \subset \operatorname{int} D^k$ концентрические шары $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4$ радиусов $r/5$, $2r/5$, $3r/5$, $4r/5$, где r — радиус шара B. Компактное подмножество $V = \varphi^{-1}(B) \subset U$ содержится в некотором n-мерном симплексе в $\mathbb{R}^n$. Многократно применяя к этому симплексу барицентрическое подразбиение, мы можем выбрать в нём симплициальный подкомплекс K (триангулированное множество), удовлетворяющие условиям: $V \subset K \subset U$ и для любого симплекса $\varDelta \subset K$ имеем $\operatorname{diam} \varphi(\varDelta) < r/5$.

Пусть K_1 — объединение симплексов построенной триангуляции множества K, φ-образы которых пересекаются с B_4. Тогда $B_4 \cap \varphi(U) \subset \varphi(K_1) \subset B$, где последнее включение следует из того, что $\operatorname{diam} \varphi(\varDelta) < r/5$ для $\varDelta \subset K_1$.

Рассмотрим отображение $\varphi' \colon K_1 \to B$, совпадающее с φ на вершинах триангуляции и линейное на каждом симплексе. Отображения $\varphi|_{K_1}$ и φ' гомотопны — они соединяются прямолинейной гомотопией

$$\varphi_t \colon K_1 \to B, \quad \varphi_0 = \varphi|_{K_1}, \quad \varphi_1 = \varphi'.$$

Доказательство (окончание).

Теперь «сошьём» отображения φ и φ' в отображение $\psi\colon U \to \operatorname{int} D^k$:

$$\psi(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{если } \varphi(u) \notin B_3, \\ \varphi'(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_2, \\ \varphi_{3-5r(u)}(u), & \text{если } \varphi(u) \in B_3 \setminus B_2. \end{cases}$$

Здесь $r(u)$ — расстояние от $\varphi(u)$ до центра шара B. Отображение ψ определено и непрерывно для всех $u \in U$ (отображение φ_t определено только на подмножестве $K_1 \subset U$, но если $\varphi(u) \in B_3$, то $u \in K_1$). При этом ψ совпадает с φ на $U \setminus V$ (если $u \in U \setminus V$, то $\varphi(u) \notin B_3$) и $\psi(U) \cap B_1 = \varphi'(K_1) \cap B_1$ (если $\varphi(u) \in B_3 \setminus B_2$, то $\psi(u) = \varphi_{3-5r(u)}(u) \notin B_1$ из-за условия на диаметры). Так как φ' линейно на симплексах триангуляции, $\varphi'(K_1) \cap B_1$ представляет собой конечное число кусков n-плоскостей и не может совпадать со всем k-мерным шаром B_1 ($k > n$). Поэтому $\psi(U)$ не покрывает всего шара B_1, а значит и всего шара B. $\square$

Предложение

Любое отображение $S^k \to S^n$ при $k < n$ гомотопно отображению в точку.

Доказательство.

Применим теорему о клеточной аппроксимации к клеточным разбиениям сфер с двумя клетками. При $k < n$ клеточное отображение есть отображение в точку. $\square$