Введение в топологию

Лекция 6

Тарас Евгеньевич Панов

Механико-математический факультет МГУ, 2 курс, осень 2021 г.

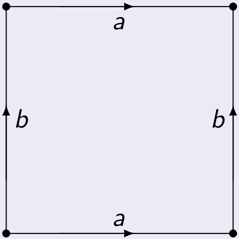
Текст лекций и другие учебные материалы доступны на странице:
http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching

7 октября 2021 г.

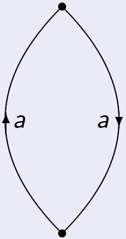
Пример (классические поверхности)

Классические двумерные поверхности (сферы с ручками, проективные плоскости с ручками, бутылки Клейна с ручками) получаются путём отождествления ребёр на границе многоугольника. Это приводит к клеточным разбиениям поверхностей с одной двумерной клеткой.

Пример (классические поверхности)



Тор

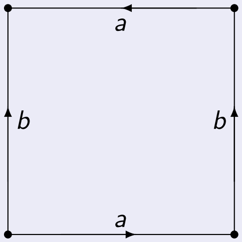


$\mathbb{R}P^2$

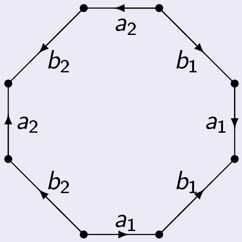
Слева изображено клеточное разбиение тора, получаемое отождествлением ребёр квадрата в соответствии с буквами и направлением стрелок. Это разбиение имеет одну 0-мерную клетку (в которую склеиваются все вершины), две 1-мерных клетки a и b и одну 2-мерную клетку (внутренность квадрата).

Справа изображено клеточное разбиение проективной плоскости с одной 0-мерной, одной 1-мерной и одной 2-мерной клетками, которое совпадает с рассмотренным ранее разбиением $\mathbb{R}P^n$ при $n = 2$.

Пример (классические поверхности)



Бутылка Клейна

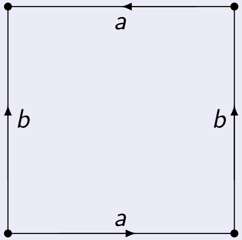


Крендель

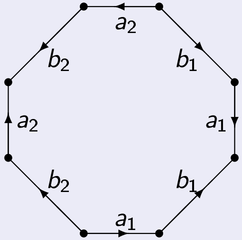
Слева изображено клеточное разбиение бутылки Клейна с одной 0-мерной, двумя 1-мерными и одной 2-мерной клетками.

Справа изображено клеточное разбиение сферы с двумя ручками (кренделя), получаемое отождествлением ребёр восьмиугольника. Оно содержит одну 0-мерную, четыре 1-мерные и одну 2-мерную клетками.

Пример (классические поверхности)



Бутылка Клейна



Крендель

Аналогично, разбиение сферы с g ручками (также называемой ориентируемой поверхностью рода g) можно получить отождествлением рёбер $4g$-угольника. Такое разбиение имеет $2g$ одномерных клеток $a_1, \ldots, a_g$ и $b_1, \ldots, b_g$.

Разбиение проективной плоскости с g ручками можно получить отождествлением рёбер $4g+2$-угольника, а разбиение бутылки Клейна с g ручками — отождествлением рёбер $4g+4$-угольника.

Свойство продолжения гомотопии

Подпространство A пространства X называется его **ретрактом**, если существует отображение $r\colon X \to X$, такое, что $r(X) = A$ и $r|_A = \mathrm{id}$ (т. е. $r(a) = a$ для любого $a \in A$).

Отображение r называется **ретракцией** X на A; оно удовлетворяет соотношению $r^2 = r$ и является топологическим аналогом проектора.

Если ретракция $r\colon X \to X$, $r(X) = A$, гомотопна тождественному отображению, то A называется **деформационным ретрактом** пространства X. Если, сверх того, гомотопию $F\colon X \times I \to X$ между r и id можно сделать тождественной на A (т. е. $F(a, t) = a$ для любого $t \in I$), то A называется **строгим деформационным ретрактом** пространства X.

Пример

1. Для любой точки $x_0 \in X$ подпространство $x_0 \times Y \cong Y$ является ретрактом произведения $X \times Y$. Ретракция $r\colon X \times Y \to X \times Y$ задаётся формулой $r(x, y) = (x_0, y)$.

2. Единичная окружность S^1 является строгим деформационным ретрактом пространства $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Ретракция $r\colon \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ задаётся формулой $r(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$, а гомотопия между r и id — формулой $F(\boldsymbol{x}, t) = t\boldsymbol{x} + (1 - t)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$.

Парой пространств называется пара (X, A), где X — пространство, а A — его подпространство. **Отображением пар** $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ называется непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, такое, что $f(A) \subset B$. Например, отображение пространств с отмеченными точками является отображением пар $(X, x_0) \to (Y, y_0)$.

Говорят, что пара (X, A) обладает **свойством продолжения гомотопии** (**homotopy extension property**, **HEP**), если для любого отображения $f\colon X \to Z$ и гомотопии $F\colon A \times I \to Z$, такой, что $F_0 = f|_A$, существует гомотопия $\widehat{F}\colon X \times I \to Z$, для которой $\widehat{F}_0 = f$ и $\widehat{F}|_{A\times I} = F$.

Таким образом, (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии, если любое отображение $X \times 0 \cup A \times I \to Z$ можно продолжить до отображения $X \times I \to Z$.

Пара (X, A), удовлетворяющая свойству продолжения гомотопии, также называется **парой Борсука**, а отображение $A \to X$ называется **корасслоением** (смысл этого термина будет объяснён позже).

Предложение

Пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии тогда и только тогда, когда $X \times 0 \cup A \times I$ — ретракт пространства $X \times I$.

Доказательство

Свойство продолжения гомотопии влечёт, что тождественное отображение $\mathrm{id}\colon X \times 0 \cup A \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ продолжается до отображения $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$, а потому $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$.

Пусть теперь дана ретракция $r\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$. Отображения $f\colon X \times 0 \to Z$ и $F\colon A \times I \to Z$ согласованы на $A \times 0$, а потому склеиваются в отображение $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I \to Z$. Трудность может заключаться в том, что топология склейки $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I$ (фактор-топология несвязного объединения $X \times 0 \sqcup A \times I$) может отличаться от топологии, индуцированной вложением $X \times 0 \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$.

Доказательство (продолжение).

Если подмножество $A \subset X$ замкнуто, то топология склейки совпадает с индуцированной топологией. (Заметим, что подмножество $B \subset X \times 0 \cup A \times I$ замкнуто в топологии склейки тогда и только тогда, когда замкнуты $B \cap X \times 0$ и $B \cap A \times I$, а то же подмножество замкнуто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда найдётся замкнутое $B' \subset X \times I$, для которого $B = B' \cap (X \times 0 \cup A \times I)$.) Далее нам понадобится только этот случай. В общем случае можно доказать, что при наличии ретракции $r\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ топология склейки грубее индуцированной топологии, поэтому непрерывное отображение $X \times 0 \cup_{A \times 0} A \times I \to Z$ из склейки будет также непрерывно в индуцированной топологии.

В результате получаем композицию

$$X \times I \xrightarrow{r} X \times 0 \cup A \times I \xrightarrow{f \cup F} Z,$$

которая задаёт требуемое продолжение гомотопии. □

Клеточной парой называется пара (X, A), где X — клеточное пространство, а A — его клеточное подпространство.

Теорема

Клеточная пара (X, A) обладает свойством продолжения гомотопии.

Доказательство

Мы докажем, что $X \times 0 \cup A \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$; тогда результат будет следовать из предыдущего утверждения.

Доказательство (продолжение)

Ретракция $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ будет построена как композиция ретракций $r_n \colon X^n \times I \to X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$. Композиция здесь понимается в следующем смысле. Так как $X \times I = \bigcup_{n \geqslant 0} X^n \times I$, каждая точка $x \in X \times I$ лежит в $X^n \times I$ для некоторого n. Применив к x ретракцию r_n, мы попадём либо в $X^n \times 0 \cup A^n \times I \subset X \times 0 \cup A \times I$, либо в $X^{n-1} \times I$. В последнем случае мы применяем ретракцию $r_{n-1} \colon X^{n-1} \times I \to X^{n-1} \times 0 \cup (X^{n-2} \cup A^{n-1}) \times I$, в результате чего попадём либо в $X \times 0 \cup A \times I$, либо в $X^{n-2} \times I$, и так далее. В результате, последовательно применяя к $x \in X^n \times I$ ретракции r_n, r_{n-1}, $\ldots$, r_0, мы попадём в $X \times 0 \cup A \times I$, так как $X^{-1} = \varnothing$.

Получаемое отображение $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ будет непрерывно, так как оно непрерывно на каждом остове $X^n \times I$, где оно устроено как композиция конечного числа непрерывных ретракций. Этот процесс соответствует тому, что мы продолжаем гомотопию $A \times I \to Z$ до $X \times I \to Z$ последовательно по остовам, на n-шаге продолжая гомотопию $(X^{n-1} \cup A) \times I \to Z$ до гомотопии $(X^n \cup A) \times I \to Z$.

Доказательство (окончание).

Осталось построить ретракцию

$$r_n\colon X^n \times I \to X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I.$$

Пространство X^n получается из $X^{n-1} \cup A^n$ добавлением всех n-мерных клеток, не лежащих в A. Таким образом, $X^n \times I$ получается из $X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ приклеиванием экземпляров $D^n \times I$ вдоль $D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$ при помощи характеристических отображений n-мерных клеток. Так как характеристическое отображение $D^n \to X^n$ является гомеоморфизмом на внутренности шара, требуемая ретракция $r_n\colon X^n \times I \to X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ получается применением отдельно для каждой n-мерной клетки стандартной ретракции $r\colon D^n \times I \to D^n \times 0 \cup \partial D^n \times I$ (цилиндр ретрагируется на объединение дна и стенки). Эту стандартную ретракцию можно задать центральной проекцией из точки $(0,2) \in D^n \times \mathbb{R}$. □

Теорема

Если пара (X, A) удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (например, если (X, A) — клеточная пара) и A стягиваемо, то отображение факторизации $q\colon X \to X/A$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство.

Стягивание пространства A — это гомотопия между отображениями $\mathrm{id}\colon A \to A$ и $A \to pt$. Пусть $F_t\colon X \to X$ — продолжение этой гомотопии, причём $F_0 = \mathrm{id}$. Так как $F_t(A) \subset A$ для всех t, определена гомотопия фактор-отображений $\widehat{F}_t\colon X/A \to X/A$, входящая в коммутативную диаграмму слева:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F_t"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\
X/A \arrow[r, "\widehat{F}_t"] & X/A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\
X/A \arrow[r, "\widehat{F}_1"] \arrow[ur, "g"] & X/A
\end{tikzcd}
$$

При $t = 1$ мы имеем $F_1(A) = pt$, а значит F_1 индуцирует отображение $g\colon X/A \to X$, причём $gq = F_1$, как на диаграмме справа. Кроме того, $qg = \widehat{F}_1$, так как $qg(\widehat{x}) = qgq(x) = qF_1(x) = \widehat{F}_1 q(x) = \widehat{F}_1(\widehat{x})$.

Тогда $g\colon X/A \to X$ и $q\colon X \to X/A$ являются взаимно обратными гомотопическим эквивалентностями, так как $gq = F_1 \simeq F_0 = \mathrm{id}$ посредством F_t и $qg = \widehat{F}_1 \simeq \widehat{F}_0 = \mathrm{id}$ посредством $\widehat{F}_t$. □

Следствие

Если (X, A) *— клеточная пара, то*

$$X/A \simeq X \cup CA,$$

где CA *— конус над* A.

Доказательство.

Мы имеем $X/A = (X \cup CA)/CA \simeq X \cup CA$, где последняя гомотопическая эквивалентность вытекает из предыдущей теоремы, применённой к клеточной паре $(X \cup CA, CA)$. $\square$